תוכן עניינים

תרגול 1

משוואה דיפרנצירלית היא משוואה הכוללת נגזרות.

לפתור משוואה דיפרנציאלית פירושו למצוא פונקציה כזו שמקיימת משוואה נתונה.

הערה

בהמשך נגדיר משוואה דיפרנציאלית באופן מדויק יותר.

דוגמא

$y'=0.1y$ היא משוואה דיפרנציאלית.

$y=e^{0.1x}$ פתרון של המשוואה מכיוון ש $y'=0.1e^{0.1x}$ ואז הצבת הפונקציה במשוואה נותן פסוק אמת.

נשים לב שגם $y=2e^{0.1x}$ הוא גם פתרון של המשוואה וסה"כ לכל קבוע c נקבל ש $y=ce^{0.1x}$ הוא פתרון של המשוואה.

שימושים במשוואות דיפרנציאליות בפתרון בעיות

בעזרת משוואות דיפרנציאליות ניתן לפתור בעיות בתחומים רבים.

אנחנו נראה בשיעור דוגמאות לפתרון בעיות בכלכלה ובגיאומטריה.

תזכורת

הגדרת הנגזרת: $y'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$.

שאלה 1

מפקידים בבנק 1000 ₪ עם ריבית שנתית של 10%.

כמה כסף נצבר לאחר 5 שנים במקרים הבאים:

א. הריבית מתעדכנת בכל שנה.

ב. הריבית מתעדכנת בכל חודש.

ג. הריבית מתעדכנת בכל יום.

ד. הריבית הינה רגעית ומתעדכנת בכל רגע ורגע.

פתרון

א. בכל שנה נקבל 10% ולכן לאחר שנה יהיה לנו $y(1)=y(0)+y(0)\cdot 0.1=1000+1000\cdot 0.1=1000\cdot(1+0.1)$

כעבור שנתיים $y(2)=y(1)+y(1)\cdot 0.1=1000\cdot(1+0.1)+1000\cdot(1+0.1)\cdot 0.1=1000\cdot(1+0.1)^2$.

כעבור חמש שנים $y(5)=1000\cdot(1+0.1)^5=1610.51$.

ב. בכל חודש נקבל $\frac{10}{12}\%$ ריבית ולכן לאחר 5 שנים כלומר 60 חודש נקבל.

$$y(5)=1000\cdot\left(1+\frac{10}{12}\right)^{60}=1645.31 .$$

ג. בכל יום נקבל $\frac{10}{360}\%$ ריבית ולכן לאחר 5 שנים כלומר 1800 ימים נקבל.

$y(5)=1000\cdot\left(1+\frac{10}{360}\right)^{1800}=1648.6$.

ד. הריבית מתעדכנת בכל h זמן, מכיוון שהי מתעדכנת בכל רגע נקבל ש $h\to 0$ ומתקיים

$y(t+h)=y(t)+y(t)\cdot h\cdot 0.1\Rightarrow \frac{y(t+h)-y(t)}{h}=0.1y(t)$.

מכיוון ש $h\to 0$ נקבל באגף שמאל את הגדרת הנגזרת ז"א $y'(t)=0.1y(t)$.

ראינו שפתרון המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל הוא $y=ce^{0.1t}$.

מכיוון ש $y(0)=1000$ כלומר $c=1000$ ואז $y=1000e^{0.1t}$.

$y=1000e^{0.1\cdot 5}=1648.72$

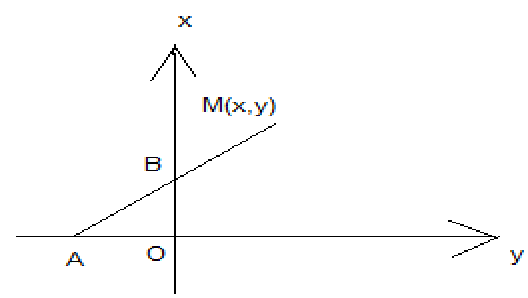
<u>שאלה 2</u>

מצא משוואת עקומה שעוברת דרך הנקודה $P(1,2)$ כך שלכל משיק המשיק לעקומה ברביע הראשון מתקיים:

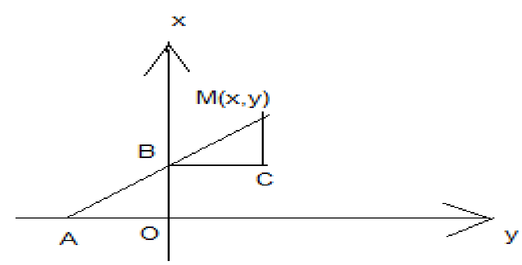
הקטע בין נקודת ההשקה לנקודת החיתוך עם ציר ה y שווה לקטע בין נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה y לנקודת החיתוך עם ציר ה x .

<u>פתרון</u>

תחילה נשרטט את המישק בבעיה



מהנתונים מתקיים: $y'=\frac{OB}{OA}$ ו $AB=BM$.



נשים לב שהמשולשים חופפים כלומר: $AO=BC=x\,,\,OB=MC=\frac{y}{2}$.

מהמשוואה $y'=\frac{OB}{OA}$ נקבל את המשוואה הדיפרנציאלית $y'=\frac{y}{2x}$ הפתרון של המשוואה הנ"ל $y=c\sqrt{x}$.

נראה בהמשך כיצד ניתן להגיע לפתרון הנ"ל. נשאר לחשב את הקבוע.

נתון שהעקומה עוברת דרך הנקודה $P(1,2)$ ולכן $c=2$ והמשוואה המבוקשת היא $y=2\sqrt{x}$.

תרגול 2

משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון

במשוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון מופיעים: המשתנה הבלתי תלוי x, פונקציה נעלמת $y(x)$ ונגזרתה $y'(x)$.

צורתה הכללית של משוואה כזו היא: $F(x,y,y')=0$.

נניח שאפשר לחלץ את y' מהמשוואה ולרשומה כך: $y'(x)=f(x,y(x))$. הצגה זו של המשוואה נקראת הצגה קנונית.

דוגמא 1

המשוואה $5y'+2xy-e^x=0$ רשומה בצורה כללית כאשר $F(x,y,y')=5y'+2xy-e^x$.

נחלץ את y' ונקבל $y'=\frac{-2xy+e^x}{5}$, קיבלנו את ההצגה הקנונית של המשוואה כאשר $f(x,y)=\frac{-2xy+e^x}{5}$.

הערה 1

לא תמיד ניתן לרשום את המשוואה בעזרת ההצגה הקנונית. למשל: $xy'+2e^{y'}-\cos y'=0$.

הערה 2

במסגרת הקורס נלמד לפתור משוואות שכן ניתן לרשום אותן בצורתם הקנונית.

משוואה דיפרנציאלית מסדר n

במשוואה דיפרנציאלית מסדר n מופיעים: המשתנה הבלתי תלוי x ובפונקציות $y(x),y'(x),y''(x),...,y^{(n)}(x)$.

צורתה הכללית של משוואה כזו היא: $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0$.

נניח שאפשר לחלץ את $y^{(n)}$ מהמשוואה ולרשומה כך: $y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$. הצגה זו של המשוואה נקראת הצגה קנונית.

דוגמא

$y^{(3)}+5(y')^4-3x+\sin x=0$ היא משוואה דיפרנציאלית מסדר 3 כאשר $F\left(x,y,y'',y^{(3)}\right)=y^{(3)}+5(y')^4-3x+\sin x$.

נחלץ את $y^{(3)}$ ונקבל $y^{(3)}=-5(y')^4+3x-\sin x$, קיבלנו את ההצגה הקנונית של המשוואה כאשר

$f(x,y,y'')=-5(y')^4+3x-\sin x$.

הערה

במסגרת הקורס נלמד למצוא פתרון למשוואה דיפרנציאלית מסדר 2 ז"א $F(x,y,y',y'')=0$ שניתן לרשום אותה בצורה הקנונית

$y''=f(x,y,y')$.

הגדרה

תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בתחום D של המישור x,y. פתרון של המשוואה $y'=f(x,y)$ בקטע פתוח I הוא פונקציה בעלת התכונות:

א. $y(x)$ גזירה בכל נקודה ב I.

ב. הגרף של $y(x)$ מצוי בתחום D.

ג. הפונקציה $y(x)$ ממלאת את המשוואה בקטע I. כלומר: $y'(x)=f\left(x,y(x)\right)$ לכל x ב I.

<u>דוגמא 1</u>

נתבונן במשוואה $y'=-xy$. הפונקציה $f(x,y)=-xy$ מוגדרת בכל המישור. ניתן לראות שהפונקציה $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ מקיימת את שלושת התנאים בהגדרה כאשר $I=(-\infty,\infty)$.

<u>דוגמא 2</u>

נתבונן במשוואה $y'=-\frac{x}{y}$. הפונקציה $f(x,y)=-\frac{x}{y}$ לא מוגדרת בכל המישור.

ניתן להתבונן בחצי המישור העליון $(y>0)$ ובחצי המישור התחתון $(y<0)$.

בחצי המישור העליון הפונקציה $y=\sqrt{1-x^2}$ היא פתרון בקטע $I=(-1,1)$.

בחצי המישור התחתון הפונקציה $y=-\sqrt{1-x^2}$ היא פתרון בקטע $I=(-1,1)$.

<u>הגדרה</u>

תהי נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y'=f(x,y)$ כאשר הפונקציה f מוגדרת בתחום D במישור.

בעיית ההתחלה עבור משוואה זו היא משוואה דיפרנציאלית יחד עם התנאי $y(x_0)=y_0$.

כאשר x_0 ו y_0 הם מספרים נתונים, כך שהנקודה (x_0,y_0) נמצאת בתחום D.

כלומר בעיית הערך ההתחלתי היא זוג המשוואות $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$.

<u>דוגמא 1</u>

$\begin{cases} y'=3y \\ y(0)=0 \end{cases}$ הפתרון הכללי של המשוואה $y'=3y$ הוא $y=ce^{3x}$ והפתרון היחיד הוא $y(x)\equiv 0$.

<u>דוגמא 2</u>

$\begin{cases} y'=3y^{2/3} \\ y(0)=0 \end{cases}$ נשים לב ששתי הפונקציות $y_1(x)=0, y_2(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ (x-1)^3 & 1\le x \end{cases}$ הן פתרונות של בעיית ההתחלה.

<u>הערה 1</u>

אם היינו מנסים לבנות פתרון לדוגמא 1 באופן דומה לבניית פתרון בדוגמא 2 היינו מקבלים פונקציה שהיא לא רציפה בקטע I ולכן לא גזירה בקטע I והיא לא מהווה פתרון למערכת. לדוגמא 1 יש פתרון יחיד.

<u>הערה 2</u>

לבעיית ההתחלה בדוגמא 2 יש אינסוף פתרונות עבור α חיובי נקבל $y_2(x)=\begin{cases} 0 & x<\alpha \\ (x-\alpha)^3 & \alpha\le x \end{cases}$

משפט קיום ויחידות

תהי $f\left(x,y\right)$ פונקציה של שני משתנים הרציפה במלבן פתוח $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|\alpha<x<\beta,\gamma<y<\delta\right\}$ ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה במלבן D. תהי $\left(x_0,y_0\right)$ נקודה ב D. אז קיים קטע פתוח I המכיל את הנקודה x_0 ובו קיים פתרון יחיד $y=y\left(x\right)$ לבעיית הערך ההתחלתי $\begin{cases} y'=f\left(x,y\right) \\ y\left(x_0\right)=y_0 \end{cases}$.

דוגמא 1

לבעיית הערך ההתחלתי $\begin{cases} y'=5\left(y+x^5\right)^{4/5}-5x^4 \\ y\left(-1\right)=1 \end{cases}$ יש שני פתרונות שונים $\begin{matrix} y_1\left(x\right)=-x^5 \\ y_2\left(x\right)=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4 \end{matrix}$.

נבדוק מדוע משפט הקיום והיחידות לא מתקיים במקרה זה:

$f\left(x,y\right)=5\left(y+x^5\right)^{4/5}-5x^4 \Rightarrow f_y\left(x,y\right)=\dfrac{4}{\left(y+x^5\right)^{1/5}}$ ואז $f_y\left(-1,1\right)$ לא מוגדר, ולכן לא קיים מלבן פתוח שמכיל את הנקודה $\left(-1,1\right)$ שבו הנגזרת החלקית $f_y\left(x,y\right)$ מוגדרת ורציפה.

דוגמא 2

לבעיית הערך ההתחלתי $\begin{cases} y'=0.1y \\ y\left(0\right)=1000 \end{cases}$ יש פתרון יחיד מכיוון שהפונקציה היא $f\left(x,y\right)=0.1y$ ונגזרתה $f_y\left(x,y\right)=0.1$ רציפה בכל המישור.

תרגול 3

משוואה ליניארית מסדר ראשון

משוואה ליניארית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה $y'+p(x)y=q(x)$.

כאשר $q(x)=0$ נאמר שהמשוואה הומוגנית. ז"א $y'+p(x)y=0$.

פתרון משוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון

$$y'+p(x)y=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y$$
$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$
$$\ln y=-\int p(x)dx+c$$
$$y=c_1e^{-\int p(x)dx}$$

דוגמא

$$y'-y\sin x=0$$
$$y'=y\sin x$$
$$\frac{dy}{dx}=y\sin x$$
$$\frac{dy}{y}=\sin x dx$$
$$\ln y=-\cos x+c$$
$$y=c_1e^{-\cos x}$$

משפט

כל פתרון של משוואה לא הומוגנית הוא סכום פתרון כללי של משוואה הומוגנית ופתרון פרטי של משוואה לא הומוגנית.

דרך לפתרון משוואה לא הומוגנית מסדר ראשון

שלב א: נמצא פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית.

שלב ב: נמצא בעזרת ניחוש פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית.

שלב ג: נחבר את התשובות שקיבלנו בשלבים הקודמים.

דוגמא

$$y'+\frac{y}{x}=3x$$

פתרון

שלב א: נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית $y'+\frac{y}{x}=0$

$$y'=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln y=-\ln x+\ln c\Rightarrow y=\frac{c}{x}$$

שלב ב: נשים לב ש $y_p=x^2$ מהווה פתרון למשוואה הלא הומוגנית

שלב ג: הפתרון הכללי הוא $y=\frac{c}{x}+x^2$

ניתן למצוא את הפתרון הכללי גם ללא ניחוש אלא בשיטת וריאציית המקדמים.

נרשום את הקבוע בפתרון של המשוואה ההומוגנית כמשתנה של x ונציב במשוואה הלא הומוגנית

$$y=\frac{c(x)}{x}\Rightarrow y'=\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}\Rightarrow\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}+\frac{c(x)}{x^2}=3x\Rightarrow\frac{c'(x)}{x}=3x$$
$$c'(x)=3x^2\Rightarrow c(x)=x^3\Rightarrow y=x^2$$

וקיבלנו פתרון פרטי גם ללא שיטת הניחוש.

תרגיל

פתור את המשוואה $y'-y\sin x=\sin x\cos x$.

פתרון

ראינו מקודם שהפתרון של המשוואה $y'-y\sin x=0$ הוא $y=ce^{-\cos x}$.

נמצא בעזרת וריאציית המקדמים פתרון פרטי למשוואה $y'-y\sin x=\sin x\cos x$.

$$y=c(x)e^{-\cos x}\Rightarrow y'=c'(x)e^{-\cos x}+c(x)\sin xe^{-\cos x}$$

נציב במשוואה ונקבל

$$c'(x)e^{-\cos x}+c(x)\sin xe^{-\cos x}-c(x)\sin xe^{-\cos x}=\sin x\cos x$$

$$c'(x)=\sin x\cos xe^{\cos x}\Rightarrow c(x)=-\cos xe^{\cos x}+e^{\cos x}$$

הפתרון הפרטי הוא $y=\left(-\cos xe^{\cos x}+e^{\cos x}\right)e^{-\cos x}\Rightarrow y=-\cos x+1$.

הפתרון הכללי הוא $y=ce^{-\cos x}-\cos x+1$.

תרגיל

פתור את המשוואה $y'+\tan y=\dfrac{x}{\cos y}$.

פתרון

נציב $t=\sin y \Rightarrow t'=y'\cos y$

$$t'+t=x\Leftarrow y'\cos y+\sin y=x\Leftarrow y'+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{x}{\cos y}$$

קיבלנו משוואה שאנו יודעים לפתור $t=ce^{-x}+x-1$ ואז $y=\arcsin\left(ce^{-x}+x-1\right)$.

הערה

פתרון שלא ניתן להגיע אליו בעזרת הפתרון הכללי נקרא פתרון סינגולארי.

דוגמא

$$y'=-2xy^2$$

נמצא פתרון כללי למשוואה

$-\dfrac{y'}{y^2}=2x$ נציב $t=\dfrac{1}{y}\Rightarrow t'=-\dfrac{y'}{y^2}\Rightarrow t'=2x\Rightarrow t=x^2+c\Rightarrow y=\dfrac{1}{x^2+c}$.

נשים לב ש $y=0$ הוא גם פתרון של המשוואה אבל לא ניתן להגיע אליו מהפתרון הכללי ולכן הוא פתרון סינגולארי.

משוואת ברנולי

משוואת ברנולי היא משוואה מהצורה $y'+p(x)y=q(x)y^n$ כאשר $n\neq 0,1$.

במקרה זה נציב $z=\dfrac{1}{y^{n-1}}\Rightarrow z'=\dfrac{(1-n)\cdot y'}{y^n}$.

נחלק את המשוואה ב y^n נקבל $\dfrac{y'}{y^n}+\dfrac{p(x)y}{y^n}=q(x)$ ואז $\dfrac{z'}{1-n}+p(x)z=q(x)$ קיבלנו משוואה ליניארית שאנחנו יודעים לפתור.

תרגיל

פתור את המשוואה $y'-2xy=3x^3y^2$.

פתרון

נשים לב שזו משוואת ברנולי כאשר $n=2$.

נחלק ב y^2 ונקבל $\dfrac{y'}{y^2}-\dfrac{2x}{y}=3x^3$ נציב $z=\dfrac{1}{y}\Rightarrow z'=-\dfrac{y'}{y^2}$ ואז נקבל את המשוואה $-z'-2xz=3x^3\Rightarrow z'+2xz=-3x^3$.

קיבלנו משוואה ליניארית לא הומוגנית מסדר ראשון.

נפתור את המשוואה ההומוגנית

$$z = ce^{-x^2} \Leftarrow \frac{dz}{z} = -2xdx \Leftarrow \frac{dz}{dx} = -2xz \Leftarrow z' = -2xz \Leftarrow z' + 2xz = 0$$

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית.

נרשום את הקבוע בפתרון של המשוואה הלא הומוגנית כפונקציה של x ונקבל

$$z' = c'(x)e^{-x^2} - 2xc(x)e^{-x^2} \Leftarrow z = c(x)e^{-x^2}$$

נציב במשוואה הלא הומוגנית

$$c'(x)e^{-x^2} - 2xc(x)e^{-x^2} + 2xc(x)e^{-x^2} = -3x^3$$

$$c'(x) = -3x^2e^{x^2} \Rightarrow c(x) = \frac{-3}{2}x^2e^{x^2} + \frac{3}{2}e^{x^2}$$

כאשר את האינטגרל פתרנו ע"י אינטגרציה בחלקים.

נציב את $c(x)$ שקיבלנו במשוואה בפתרון המשוואה ההומוגנית ונקבל פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית.

$$z_p = \left(-\frac{3}{2}x^2e^{x^2} + \frac{3}{2}e^{x^2}\right)e^{-x^2} \Rightarrow z_p = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

$$z = ce^{-x^2} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

מכיוון שהצבנו $z = \frac{1}{y}$ נקבל $y = \dfrac{2}{2ce^{-x^2} - 3x^2 + 3}$

תרגול 4

שיטת הפרדת משתנים

משוואה דיפרנציאלית מהצורה $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$ $\left(f_1(x)\neq 0, g_1(y)\neq 0, f_2(x)\neq 0, g_2(y)\neq 0\right)$

או מהצורה $y'=f(x)g(y)$. נפתור בעזרת השיטה הנ"ל.

דרך לפתרון

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0\Rightarrow\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0\Rightarrow\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=c$$

תרגיל

מצא פונקציה העוברת דרך הנקודה $(1,1)$ ומקיימת $y'=\frac{-x}{y+1}$.

פתרון

נרשום תחילה את המשוואה: $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y+1}\Rightarrow(y+1)dy+xdx=0.$$

כעת נפתור את המשוואה בעזרת שיטת הפרדת המשתנים.

$$(y+1)dy+xdx=0\Rightarrow\int(y+1)dy+\int xdx=0\Rightarrow\frac{y^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}=c.$$

נתון שהפונקציה עוברת דרך הנקודה $(1,1)$ ולכן ניתן למצוא את הקבוע c.

$$\frac{1^2}{2}+1+\frac{1^2}{2}=c\Rightarrow c=2.$$

$$\frac{y^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}=2.$$

תרגיל ממבחן תשע"ג מועד א

א. בדקו האם המשוואה הדיפרנציאלית $xy'=xy-2y$ ניתנת להפרדת משתנים ומצאו את הפתרון הכללי.

ב. האם קיים פתרון יחיד כאשר $y(0)=2$? נמקו היטב.

פתרון

סעיף א

ניתן לרשום את המשוואה $xy'=xy-2y$ באופן הבא $y'=\frac{(x-2)}{x}\cdot y$, קיבלנו משוואה מהצורה $y'=f(x)g(y)$ ולכן היא ניתנת להפרדת משתנים. $\frac{dy}{y}=\frac{x-2}{x}dx\Leftarrow\ln y=x-2\ln x+\ln c\Leftarrow y=\frac{ce^x}{x^2}$.

סעיף ב

לא קיים פתרון שמקיים $y(0)=2$, משפט הקיום והיחידות לא מתקיים מכיוון שבנקודה $(0,2)$ הפונקציה $f(x,y)=\frac{(x-2)}{x}\cdot y$ לא רציפה.

משוואה הומוגנית

המשוואה $y'=f(x,y)$ נקראת משוואה הומוגנית אם $f(tx,ty)=f(x,y)$.

דוגמא

המשוואה $y'=\frac{(x+y)^2}{xy}$ הומוגנית.

$$f\left(x,y\right)=\frac{\left(x+y\right)^2}{xy}\Rightarrow f\left(tx,ty\right)=\frac{\left(tx+ty\right)^2}{tx\cdot ty}\Rightarrow f\left(tx,ty\right)=\frac{t^2\left(x+y\right)}{t^2xy}$$

$$f\left(tx,ty\right)=\frac{\left(x+y\right)^2}{xy}\Rightarrow f\left(tx,ty\right)=f\left(x,y\right)$$

דרך לפתרון

נציב $y=ux$ ואז $u'x+u=f\left(1,u\right)\Leftarrow u'x+u=f\left(x,ux\right)\Leftarrow y'=u'x+u$ ופותרים בשיטת הפרדת המשתנים.

<u>תרגיל</u>

פתור את המשוואה הדיפרנציאלית $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

<u>פתרון</u>

$y'=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$ נוכיח שהמשוואה הומוגנית. $f\left(tx,ty\right)=\frac{\sqrt{(tx)^2-(ty)^2}+ty}{tx}\Leftarrow f\left(x,y\right)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$

ואז $f\left(x,y\right)=f\left(tx,ty\right)$.

נציב $y=ux$ ואז $u'x+u=f\left(1,u\right)\Leftarrow u'x+u=f\left(x,ux\right)\Leftarrow y'=u'x+u$

ז"א $u'x=\sqrt{1-u^2}\Leftarrow u'x+u=\frac{\sqrt{1-u^2}+u}{1}$

נפתור את המשוואה $u'x=\sqrt{1-u^2}$ בעזרת הפרדת המשתנים

$$u=\sin\left(\ln\left(cx\right)\right)\Leftarrow \arcsin u=\ln\left(cx\right)\Leftarrow \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}\Leftarrow \frac{du}{dx}x=\sqrt{1-u^2}$$

נציב חזרה ונקבל $u=\sin\left(\ln\left(cx\right)\right)\Rightarrow \frac{y}{x}=\sin\left(\ln\left(cx\right)\right)\Rightarrow y=x\sin\left(\ln\left(cx\right)\right)$

<u>משוואה מדויקת</u>

למשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ קוראים משוואה מדוייקת אם האגף השמאלי של המשוואה מייצג דיפרנציאל שלם של פו' כלשהי.

<u>משפט אוילר</u>

המשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ מדויקת אם ורק אם $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

<u>דרך לפתרון משוואה מדויקת</u>

$$u(x,y)=c\Leftarrow du=M(x,y)dx+N(x,y)dy,\ M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

מטרה לחשב את $u(x,y)$.

מכיוון ש $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ נקבל ש

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$$

ואז $(1)\,u(x,y)=\int M(x,y)dx+c(y)$

נגזור לפי y ונקבל $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx+c(y)\right)=N(x,y)$

$$\frac{\partial \int M(x,y)dx}{\partial y} + c'(y) = N(x,y)$$

ואז

$$c'(y) = -\frac{\partial \int M(x,y)dx}{\partial y} + N(x,y)$$

מכיוון שזו משוואה מדויקת נקבל שהאגף הימני של המשוואה תלוי ב y בלבד ולכן נוכל למצוא את $c(y)$. נציב ב (1) ונקבל $u(x,y)$ נשווה לקבוע ונקבל את הפתרון.

<u>תרגיל</u>

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

נבדוק שהמשוואה מדויקת

$$M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2, N(x,y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 12xy, \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 12xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3$$

ואז $u(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + c(y)$

נקבל ש $u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + c(y)$.

נגזור לפי y ונקבל

$$6x^2y + 4y^3 = 6x^2y + c'(y)$$

$$c'(y) = 4y^3$$

$$c(y) = y^4$$

נציב חזרה ונקבל $u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4$.

הפתרון הוא $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$.

<u>תרגיל ממבחן תשע"ג מועד א</u>

נתונה משוואה דיפרנציאלית $(x - ny^2)y' + y = 0$, כאשר n הוא קבוע ממשי.

א. עבור אילו ערכי n המשוואה הדיפרנציאלית הינה מדויקת.
ב. פתרו את המשוואה בהתאם לתוצאות שקיבלת בסעיף א.

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

$$(x-ny^2)y' + y = 0 \Rightarrow (x-ny^2)\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow ydx + (x-ny^2)dy = 0 \Rightarrow M(x,y) = y, N(x,y) = x - ny^2.$$

לכל ערך של n נקבל $M'_y = N'_x = 1$ ולכן המשוואה מדויקת לכל ערך של n.

<u>סעיף ב</u>

$u(x,y) = \int ydx + c(y) = yx + c(y)$ אם נגזור את $u(x,y)$ לפי y מצד אחד נקבל את $N(x,y) = x - ny^2$

ומצד שני נקבל $x + c'(y)$ ולכן $x + c'(y) = x - ny^2 \Rightarrow c'(y) = -ny^2 \Rightarrow c(y) = -\frac{ny^3}{3}$.

סה"כ קיבלנו $u(x,y) = yx - \frac{ny^3}{3}$ ולכן פתרון המשוואה הוא $yx - \frac{ny^3}{3} = c$.

תרגול 5

גורם אינטגרציוני

בהינתן משוואה דיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ נמצא פונקציה μ כך שהמשוואה $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$ תהייה משוואה מדויקת.

שיטה זו נקראת שיטת גורם אינטגרציוני.

הערה: לא תמיד ניתן לפתור את המשוואה הלא מדויקת בצורה זאת.

כדי שהמשוואה $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$ תהייה מדויקת צריך להתקיים

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\Leftarrow\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M+\frac{\partial M}{\partial y}\cdot\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot N+\frac{\partial N}{\partial x}\cdot\mu.$$

תרגיל

פתור בעזר שיטת הגורם האינטגרציוני את המשוואה $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$

אם ידוע שהגורם האינטגרציוני μ היא פונקציה של x בלבד.

פתרון

מכיוון שהגורם האינטגרציוני μ היא פונקציה של x בלבד נקבל ש $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ נציב המשוואה שקיבלנו קודם ונקבל

$$\frac{\partial M}{\partial y}\cdot\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot N+\frac{\partial N}{\partial x}\cdot\mu.$$

$\frac{\partial M}{\partial y}=-x^2,\frac{\partial N}{\partial x}=2xy-3x^2$ נציב במשוואה ונקבל

$$-x^2\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}(x^2y-x^3)+(2xy-3x^2)\cdot\mu\Rightarrow(2x^2-2xy)\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}(x^2y-x^3)$$

$$2x(x-y)\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}(-x^2)(x-y)\Rightarrow2x\mu=-x^2\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial\mu}{\mu}=-\frac{2}{x}\partial x$$

$$\ln\mu=-2\ln x\Rightarrow\ln\mu=\ln\frac{1}{x^2}\Rightarrow\mu=\frac{1}{x^2}$$

הגורם האינטגרציוני הוא $\frac{1}{x^2}$ ואז המשוואה $\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy=0$ היא מדוייקת.

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2}-y\\ \frac{\partial u}{\partial y}=y-x\end{cases}\Rightarrow u(x,y)=-\frac{1}{x}-yx+c(y)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-x+c'(y)\Rightarrow y-x=-x+c'(y)$$

ולכן $c'(y)=y\Rightarrow c(y)=\frac{y^2}{2}$ נציב חזרה ונקבל $c=-\frac{1}{x}-yx+\frac{y^2}{2}$.

תרגיל ממבחן תשע"ג מועד ב

נתונה משוואה דיפרנציאלית $3x^2y^2dx+4(x^3y-3)dy=0$.

א. בדקו שהמשוואה איננה משוואה מדויקת.

ב. מצאו את הפתרון של המשוואה אם נתון $y(1)=1$. האם הפתרון הוא יחיד?

פתרון

סעיף א

$$3x^2y^2dx+4(x^3y-3)dy=0\Rightarrow M(x,y)=3x^2y^2,N(x,y)=4(x^3y-3)\Rightarrow M'_y=6x^2y,N'_x=12x^2y$$

קיבלנו ש $M'_y\neq N'_x$ והמשוואה לא מדויקת.

סעיף ב

נמצא את הגורם האינטגרציוני:

$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M+\frac{\partial M}{\partial y}\cdot \mu=\frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N+\frac{\partial N}{\partial x}\cdot \mu$. נניח שהגורם האינטגרציוני הוא פונקציה של y בלבד ז"א $\frac{\partial \mu}{\partial x}=0$ ואז

$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M+\frac{\partial M}{\partial y}\cdot \mu=\frac{\partial N}{\partial x}\cdot \mu$ כלומר $\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot y=2\mu \Leftarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot 3x^2y^2=6x^2y\cdot \mu \Leftarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot 3x^2y^2+6x^2y\cdot \mu=12x^2y\cdot \mu$

סה"כ קיבלנו $\mu=y^2 \Leftarrow \ln \mu=\ln y^2 \Leftarrow \frac{\partial \mu}{\mu}=\frac{2\partial y}{y}$.

נבדוק שאכן המשוואה $3x^2y^4dx+4\left(x^3y^3-3y^2\right)dy=0$ מדוייקת.

$M'_y=12x^2y^3,\ N'_x=12x^2y^3 \Leftarrow M\left(x,y\right)=3x^2y^4,\ N\left(x,y\right)=4\left(x^3y^3-3y^2\right) \Leftarrow 3x^2y^4dx+4\left(x^3y^3-3y^2\right)dy=0$.

קיבלנו ש $M'_y=N'_x$ ואכן המשוואה מדויקת.

הדיפרנציאל השלם הוא $u\left(x,y\right)=\int 3x^2y^4dx+c\left(y\right)=x^3y^4+c\left(y\right)$ אם נגזור את $u\left(x,y\right)$ לפי y מצד אחד נקבל את

$N\left(x,y\right)=4x^3y^3-12y^2$ ומצד שני נקבל $4x^3y^3+c'\left(y\right)$ ולכן

$c\left(y\right)=-4y^3 \Leftarrow c'\left(y\right)=-12y^2 \Leftarrow 4x^3y^3+c'\left(y\right)=4x^3y^3-12y^2$.

סה"כ קיבלנו $u\left(x,y\right)=x^3y^4-4y^3$ ולכן פתרון המשוואה הוא $x^3y^4-4y^3=c$.

נתון ש $y\left(1\right)=1$ ז"א הפתרון הוא $x^3y^4-4y^3=-3$.

נבדוק יחידות: $f\left(x,y\right)=\frac{3x^2y^2}{12-4x^3y} \Leftarrow y'=\frac{3x^2y^2}{12-4x^3y} \Leftarrow 3x^2y^2dx+4\left(x^3y-3\right)dy=0$ הפונקציה אכן רציפה בנקודה $\left(1,1\right)$.

נגזור את הפונקציה לפי y ונקבל $f'_y=\frac{6x^2y\left(12-4x^3y\right)-3x^2y^2\cdot 12x^2y}{\left(12-4x^3y\right)^2}$ ואכן הנגזרת רציפה בנקודה $\left(1,1\right)$ והפתרון הוא יחיד.

תרגול 6

משוואות ליניאריות מסדר גבוה

צורה כללית של משוואה ליניארית מסדר גבוה

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+p_2(x)y^{(n-2)}(x)+\dots p_{n-1}(x)y'(x)+p_n(x)y(x)=q(x).$$

אם $q(x)=0$ נאמר שהמשוואה היא הומוגנית.

פתרון משוואה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)}(x)+p_1y^{(n-1)}(x)+p_2y^{(n-2)}(x)+\dots p_{n-1}y'(x)+p_ny(x)=0.$$

נפתור את המשוואה האופיינית $\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\dots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$.

אם λ_1 הוא פתרון אז $y_1=e^{\lambda_1 x}$ פתרון של המשוואה.

אם λ_1 הוא פתרון בריבוי k אז $y_1=e^{\lambda_1 x}, y_2=xe^{\lambda_1 x}, y_3=x^2e^{\lambda_1 x},\dots,y_k=x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$ פתרונות של המשוואה.

אם $y_1,y_2,\dots,y_n$ פתרונות של המשוואה ו $c_1,c_2,\dots,c_n$ קבועים כלשהם אזי $y=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i$ הוא פתרון של המשוואה.

תרגיל 1

מצא פתרון כללי למשוואה $y'''-5y''+6y'=0$.

פתרון

נפתור את המשוואה $\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda=0$ ונקבל $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$.

הפתרון הכללי של המשוואה הוא $y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$.

תרגיל 2

מצא פתרון כללי למשוואה $y''-2y'+y=0$.

פתרון

מהמשוואה $\lambda^2-2\lambda+1=0$ נקבל $(\lambda-1)^2=0$ ואז $\lambda=1$ הוא פתרון של המשוואה עם ריבוי 2.

הפתרון הכללי של המשוואה הוא $y=c_1e^x+c_2xe^x$.

תרגיל 3

מצא פתרון כללי למשוואה $y'''-2y''+4y'-8y=0$.

פתרון

מהמשוואה $\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda-8=0 \Leftarrow (\lambda-2)(\lambda+2i)(\lambda-2i)=0$.

הפתרון הכללי של המשוואה הוא $y=c_1e^{2x}+c_2e^{(0+2i)x}=c_1e^{2x}+c_2e^0(\cos 2x+i\sin 2x)$.

נשים לב שאם $u(x)+iv(x)$ הוא פתרון של המשוואה אז $u(x),v(x)$ גם פתרונות של המשוואה.

סה"כ נקבל $y=c_1e^{2x}+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x$.

פתרון משוואה ליניארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)}(x)+p_1y^{(n-1)}(x)+p_2y^{(n-2)}(x)+\dots p_{n-1}y'(x)+p_ny(x)=q(x)$$

פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית ועוד פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית שווה לפתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית.

כלומר: אם y_p פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית ו y_h פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית אז $y=y_h+y_p$ פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית.

בעזרת הטבלה הבאה ניתן לנחש פתרון פרטי למשוואה האי הומוגנית.

טבלת ניחושים

$g(x)$	ניחוש עבור y_p
$g(x)=p_n(x)$ ובנוסף 0 הוא פתרון של המשוואה האופיינית בריבוי s	$x^s\cdot Q_n(x)$
$g(x)=e^{\alpha x}p_n(x)$ ובנוסף α הוא פתרון של המשוואה האופיינית בריבוי s	$x^s\cdot e^{\alpha x}Q_n(x)$
$g(x)=e^{\alpha x}\sin(\beta x)p_n(x)$ ובנוסף $\alpha+\beta i$ הוא פתרון של המשוואה האופיינית בריבוי s	$x^se^{\alpha x}\left(Q_n(x)\sin(\beta x)+P_n(x)\cos(\beta x)\right)$
$g(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x)p_n(x)$ ובנוסף $\alpha+\beta i$ הוא פתרון של המשוואה האופיינית בריבוי s	$x^se^{\alpha x}\left(Q_n(x)\sin(\beta x)+P_n(x)\cos(\beta x)\right)$

תרגיל ממבחן תשע"ג מועד ב

רשמו את התבנית של הפתרון הפרטי של המשוואה (אין צורך לחשב את המקדמים הלא מסוימים של הפתרון הפרטי):

$$y^{(3)}-6y''+9y'=2x\cos(3x)-(2x-4)e^{3x}+\sin(3x)+12x-3e^{3x}\cos(3x).$$

פתרון

יש להיעזר בטבלת הניחושים כאשר בכל פעם נתבונן בכל אחד מהמחוברים כביטוי מהעמודה הימנית בטבלת הניחושים ונתאים לו ביטוי מאגף שמאל כפתרון פרטי.

המשוואה האופיינית היא $\lambda(\lambda-3)^2=0 \Leftarrow \lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=0$.

קיבלנו 0 עם ריבוי 1 ו 3 עם ריבוי 2.

נתבונן במחובר הראשון $2x\cos(3x)+\sin(3x)$: מכיוון ש $3i$ הוא לא פתרון של המשוואה האופיינית אז הפתרון הפרטי הוא מהצורה $(a_1x+a_2)\cos(3x)+(a_3x+a_4)\sin(3x)$.

נתבונן במחובר השני $(-2x+4)e^{3x}$: מכיוון ש 3 הוא פתרון של המשוואה האופיינית בריבוי 2 אז הפתרון הפרטי הוא מהצורה $x^2(a_5x+a_6)e^{3x}$.

נתבונן במחובר השלישי $12x$: מכיוון ש 0 הוא פתרון של המשוואה האופיינית עם ריבוי 1 נקבל את הפתרון הפרטי $x(a_7x+a_8)$.

נתבונן במחובר הרביעי $-3e^{3x}\cos(3x)$: מכיוון ש $3+3i$ הוא לא פתרון של המשוואה האופיינית נקבל שהפתרון הפרטי הוא $e^{3x}\left(a_9\cos(3x)+a_{10}\sin(3x)\right)$.

התבנית של הפתרון הפרטי:

$$\left(a_1x+a_2\right)\cos\left(3x\right)+\left(a_3x+a_4\right)\sin\left(3x\right)+x^2\left(a_5x+a_6\right)e^{3x}+x\left(a_7x+a_8\right)+e^{3x}\left(a_9\cos\left(3x\right)+a_{10}\sin\left(3x\right)\right)$$

<u>תנאי התחלה</u>

הפתרון למשוואה $y^{(n)}\left(x\right)+p_1y^{(n-1)}\left(x\right)+p_2y^{(n-2)}\left(x\right)+...p_{n-1}y'\left(x\right)+p_ny\left(x\right)=q\left(x\right)$

עם תנאי ההתחלה $y\left(x_0\right)=y_0, y'\left(x_0\right)=y_1,...,y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_{n-1}$ הוא יחיד.

<u>תרגיל ממבחן תשע"ג מועד א</u>

נתונה משוואה דיפרנציאלית $y''=3y'-2y-2+e^x$.

א. מצאו פתרון פרטי למשוואה.

ב. כתבו צורה כללית לפתרון אם נתון ש $y\left(0\right)=-1, y'\left(0\right)=-1$.

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

נתבונן במשוואה $y''-3y'+2y=-2+e^x$. המשוואה האופיינית היא $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftarrow \left(\lambda-1\right)\left(\lambda-2\right)=0$.

$\lambda=1, \lambda=2$ פתרונות של המשוואה האופיינית עם ריבוי 1.

הפתרון הפרטי הוא מהצורה $y_p=a_1+a_2xe^x \Leftarrow y'_p=a_2e^x+a_2xe^x \Leftarrow y''_p=2a_2e^x+a_2xe^x$.

נציב במשוואה המקורית ונקבל

$$2a_2e^x+a_2xe^x-3\left(a_2e^x+a_2xe^x\right)+2\left(a_1+a_2xe^x\right)=-2+e^x$$
$$a_1=-1, a_2=-1 \Leftarrow 2a_1-a_2e^x=-2+e^x$$

נקבל $y_p=-1-xe^x$.

<u>סעיף ב</u>

נשים לב ש

$$y_p=-1-xe^x \Rightarrow y_p\left(0\right)=-1$$
$$y'_p=-e^x-xe^x \Rightarrow y'_p\left(0\right)=-1$$

והתשובה היא $y_p=-1-xe^x$.

<u>תרגול 7</u>

<u>מציאת פתרון פרטי בעזרת ווריאציית המקדמים</u>

נתונה המשוואה $y^{(n)}(x)+p_1y^{(n-1)}(x)+p_2y^{(n-2)}(x)+\dots p_{n-1}y'(x)+p_ny(x)=q(x)$.

מוצאים פתרון כללי למשוואה ההומוגנית $y^{(n)}(x)+p_1y^{(n-1)}(x)+p_2y^{(n-2)}(x)+\dots p_{n-1}y'(x)+p_ny(x)=0$

$y=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i$ מציבים במשוואה $y=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i$ מוצאים את $c_i(x)$ ומקבלים את הפתרון הפרטי.

<u>תרגיל</u>

מצא פתרון כללי למשוואה $y''+y=\frac{1}{\cos x}$ בקטע $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

<u>פתרון</u>

נמצא תחילה פתרון כללי למשוואה ההומוגנית $y''+y=0$.

המשוואה האופיינית היא $\lambda^2+1=0$ והפתרון של המשוואה הוא $\pm i$ עם ריבוי 1.

הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $y=c_1\cos x+c_2\sin x$.

נמצא פתרון פרטי למשוואה $y''+y=\frac{1}{\cos x}$.

נציב $y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x \Rightarrow y'=c'_1(x)\cos x-c_1(x)\sin x+c'_2(x)\sin x+c_2(x)\cos x$

מספיק לנו פתרון פרטי אחד, נמצא את הפתרון הפרטי שמקיים $c'_1(x)\cos x+c'_2(x)\sin x=0$

ואז $y'=-c_1(x)\sin x+c_2(x)\cos x \Rightarrow y''=-c'_1(x)\sin x-c_1(x)\cos x+c'_2(x)\cos x-c_2(x)\sin x$.

נציב במשוואה המקורית ונקבל $-c'_1(x)\sin x+c'_2(x)\cos x=\frac{1}{\cos x}$.

עלינו לפתור את המערכת עם התנאי שהצבנו ונקבל

$$\begin{cases}c'_1(x)\cos x+c'_2(x)\sin x=0\\ -c'_1(x)\sin x+c'_2(x)\cos x=\frac{1}{\cos x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c'_1(x)\cos x\sin x+c'_2(x)\sin^2 x=0\\ -c'_1(x)\sin x\cos x+c'_2(x)\cos^2 x=1\end{cases}\Rightarrow c'_2(x)=1\Rightarrow c_1'(x)=-\tan x$$

ז"א $c_2(x)=x, c_1(x)=\ln(\cos x)$ והפתרון הפרטי הוא $y=\ln(\cos x)\cos x+x\sin x$.

הפתרון הכללי הוא $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\ln(\cos x)\cos x+x\sin x$.

<u>מערכת משוואות</u>

מטרה לפתור מערכת משוואות ליניאריות מהצורה

$$\begin{cases} y_1'=\sum_{l=1}^{n} a_{1l}y_l \\ . \\ . \\ . \\ y_n'=\sum_{l=1}^{n} a_{nl}y_l \end{cases}$$

דוגמא למערכת משוואות

$$\begin{cases} y_1'=2y_1-3y_2+5y_3 \\ y_2'=-1y_1-4y_2+7y_3 \\ y_3'=4y_1-5y_2+8y_3 \end{cases}$$ ואז $$\begin{matrix} a_{11}=2, a_{12}=-3, a_{13}=5, a_{21}=-1, a_{22}=-4 \\ a_{23}=7, a_{31}=4, a_{32}=-5, a_{33}=8 \end{matrix}$$

דרך לפתרון

הפתרונות הם מהצורה

$y_1=\beta_1e^{\lambda x}, y_2=\beta_2e^{\lambda x},..., y_n=\beta_ne^{\lambda x} \Leftarrow y_1'=\lambda\beta_1e^{\lambda x}, y_2'=\lambda\beta_2e^{\lambda x},..., y_n'=\lambda\beta_ne^{\lambda x}$.

נציב במערכת המשוואות ונקבל

$$\begin{cases} \lambda\beta_1e^{\lambda x}=\sum_{l=1}^{n} a_{1l}\beta_le^{\lambda x} \\ . \\ . \\ . \\ \lambda\beta_ne^{\lambda x}=\sum_{l=1}^{n} a_{nl}\beta_le^{\lambda x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda\beta_1-\sum_{l=1}^{n} a_{1l}\beta_l=0 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda\beta_n-\sum_{l=1}^{n} a_{nl}\beta_l=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda-a_{11})\beta_1+a_{12}\beta_2+....+a_{1n}\beta_n=0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+....+(\lambda-a_{1n})\beta_n=0 \end{cases}$$

למערכת המשוואות הנ"ל יהיו פתרונות לא טרויאלים רק כאשר הדטרמיננטה שח המקדמים תהייה אפס.
מסקנה יש למצוא את הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים.

<u>תרגיל</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} y'=y-z \\ z'=-4y+4z \end{cases}$

נמצא את הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=5$

נמצא את β_1,β_2 עבור $\lambda=0$ ונקבל $\begin{cases} \beta_1-\beta_2=0 \\ -4\beta_1+4\beta_2=0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1=\beta_2$

נמצא את β_1,β_2 עבור $\lambda=5$ ונקבל $\begin{cases} -4\beta_1-\beta_2=0 \\ -4\beta_1-\beta_2=0 \end{cases} \Rightarrow \beta_2=-4\beta_1$

סה"כ הפתרון הוא

$$y=c_1+c_2e^{5x}$$
$$z=c_1-4c_2e^{5x}$$

<u>תרגיל</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} y'=5y-4z \\ z'=9y+5z \end{cases}$

<u>פתרון</u>

נמצא את הערכים העצמיים $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 9 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 5 \pm 6i$

נמצא את β_1, β_2 עבור $\lambda = 5 + 6i$

נקבל את מערכת המשוואות $\begin{cases} -6i\beta_1 - 4\beta_2 = 0 \\ 9\beta_1 - 6i\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\beta_1 i = -2\beta_2$

$\beta_1 = 2i, \beta_2 = 3$

$$\begin{matrix} y = 2ie^{5x}(\cos(6x) + i\sin(6x)) \\ z = 3e^{5x}(\cos(6x) + i\sin(6x)) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = e^{5x}(-2\sin(6x) + 2i\cos(6x)) \\ z = e^{5x}(3\cos(6x) + 3i\sin(6x)) \end{matrix}$$

תשובה

$$y = -2c_1e^{5x}\sin(6x) + 2c_2e^{5x}\cos(6x)$$
$$z = 3c_1e^{5x}\cos(6x) + 3c_2e^{5x}\sin(6x)$$

<u>תרגיל</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} y' = 5y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases}$

<u>פתרון</u>

נמצא את הערכים העצמיים

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

ולכן הפתרון הוא מהצורה $y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} \Rightarrow y' = 4c_1e^{4x} + c_2e^{4x} + 4c_2xe^{4x}$

$$z = c_3e^{4x} + c_4xe^{4x} \Rightarrow z' = 4c_3e^{4x} + c_4e^{4x} + 4c_4xe^{4x}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל

$$4c_1e^{4x} + c_2e^{4x} + 4c_2xe^{4x} = 5c_1e^{4x} + 5c_2xe^{4x} + c_3e^{4x} + c_4xe^{4x}$$
$$-c_1 + c_2 - c_3 = (c_2 + c_4)x \Rightarrow c_4 = -c_2, c_3 = -c_1 + c_2$$

תשובה

$$\begin{cases} y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} \\ z = (c_2 - c_1)e^{4x} - c_2xe^{4x} \end{cases}$$

תרגול 8

מערכת אי הומוגנית ליניארית במקדמים קבועים

משפט

הפתרון הכללי של מערכת דיפרנציאלית ליניארית אי הומוגנית $\underline{x}' = A\underline{x} + b(t)$ הוא סכום של הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה $\underline{x}' = A\underline{x}$ ופתרון פרטי של המערכת האי הומוגנית המתאימה.

הערה

לפי המשפט הנ"ל כדי למצוא פתרון כללי למערכת משוואות אי הומוגנית יש למצוא פתרון כללי למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון פרטי למערכת האי הומוגנית ולחבר את התוצאות.

שיטת הניחוש

דוגמא

נתונה מערכת משוואות אי הומוגנית $\begin{cases} y' = y + z + 2e^{-x} \\ z' = 4y + z + 4e^{-x} \end{cases}$.

נמצא תחילה פתרון פרטי בעזרת ניחוש.

מהתרגיל ניתן להסיק שפתרון המערכת הוא מהצורה $\begin{cases} y = \alpha e^{-x} \\ z = \beta e^{-x} \end{cases}$.

נציב את הפתרונות במערכת המשוואות הנתונה ונקבל

$\begin{cases} -\alpha e^{-x} = \alpha e^{-x} + \beta e^{-x} + 2e^{-x} \\ -\beta e^{-x} = 4\alpha e^{-x} + \beta e^{-x} + 4e^{-x} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} -\alpha e^{-x} = (\alpha + \beta + 2)e^{-x} \\ -\beta e^{-x} = (4\alpha + \beta + 4)e^{-x} \end{cases}$. נפתור את מערכת המשוואות

$\begin{cases} -\alpha = \alpha + \beta + 2 \\ -\beta = 4\alpha + \beta + 4 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -2 \\ 4\alpha + 2\beta = -4 \end{cases}$. נשים לב שקיבלנו מערכת משוואות עם אינסוף פתרונות. מכיוון שמספיק פתרון פרטי אחד נוכל לבחור $\alpha = -2, \beta = 2$ ואז הפתרון הפרטי של המערכת הוא: $\begin{cases} y = -2e^{-x} \\ z = 2e^{-x} \end{cases}$.

נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 4y + z \end{cases}$. נמצא תחילה את הערכיים העצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. נחשב

$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$.

נפתור את המשוואה $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ונקבל $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור $\lambda = -1$.

נקבל את מערכת המשוואות $\begin{cases} -2\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ -4\beta_1 - 2\beta_2 = 0 \end{cases}$ הבסיס של קבוצת הפתרונות הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור $\lambda = 3$.

נקבל את מערכת המשוואות $\begin{cases} 2\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ -4\beta_1 + 2\beta_2 = 0 \end{cases}$ הבסיס של קבוצת הפתרונות הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

סה"כ הפתרון הכללי של המערכת הוא $C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

הערה

לא תמיד נוכל למצוא את הפתרון הפרטי בעזרת שיטת הניחוש.

דוגמא

אם היינו מנסים באותה דרך למצוא פתרון פרטי למערכת $\begin{cases} y' = y + z + 2e^{-x} \\ z' = 4y + z + 12e^{-x} \end{cases}$ היינו נתקלים במערכת משוואות ללא פתרון.

משפט ווריאציית הפרמטרים

למערכת דיפרנציאלית ליניארית אי הומוגנית עם מקדמים קבועים $\underline{x}' = A + b(t)$ כאשר הרכיבים של $b(t)$ רציפים בקטע פתוח I, יש בקטע זה פתרון שהצגתו: $\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \underline{x}^{(i)}(t)$ כאשר $\left\{ \underline{x}^{(1)}(t), \underline{x}^{(2)}(t), \underline{x}^{(3)}(t), \ldots, \underline{x}^{(n)}(t) \right\}$ היא משפחת פתרונות בסיסית של

המערכת ההומוגנית המתאימה $\underline{x}' = A$ ו $C_1(t),C_2(t),C_3(t),...,C_n(t)$ הן n פונקציות, המתקבלות באמצעות פתרון מערכת משוואות אלגברית ואינטגרציה בלבד $\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\underline{x}^{(i)}(t) = \underline{b}(t)$.

<u>תרגיל</u>

מצא פתרון כללי למערכת הלא הומוגנית $\begin{cases} y' = y + z + 2e^{-x} \\ z' = 4y + z + 12e^{-x} \end{cases}$.

<u>פתרון</u>

בתרגיל הקודם ראינו שהפתרון למערכת ההומוגנית המתאימה $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 4y + z \end{cases}$ הוא $C_1e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

מהמשפט הקודם נקבל ש $C'_1(x)\underline{x}^{(1)}(x) + C'_2\,\underline{x}^{(2)}(x) = \underline{b}(x)$.

בתרגיל שלנו $\underline{x}^{(1)}(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x}^{(2)}(x) = e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{b}(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

עלינו לפתור את המשוואה $C'_1(x)e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C'_2(x)e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

יש לפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} e^{-x}C_1' + e^{3x}C_2' = 2e^{-x} \\ -2e^{-x}C_1' + 2e^{3x}C_2' = 12e^{-x} \end{cases}$.

נכפיל את המשוואה הראשונה פי שתיים ונחבר עם המשוואה השנייה.

סה"כ נקבל $4e^{3x}C_2' = 16e^{-x} \Leftarrow C_2' = 4e^{-4x} \Leftarrow C_2 = -e^{-4x}$.

נציב $C_2' = 4e^{-4x}$ במשוואה השנייה ונקבל $-2e^{-x}C_1' + 2e^{3x}\cdot 4e^{-4x} = 12e^{-x}$

נפתור את המשוואה $-2e^{-x}C_1' + 8e^{-x} = 12e^{-x} \Leftarrow -2e^{-x}C_1' = 4e^{-x} \Leftarrow C_1' = -2 \Leftarrow C_1 = -2x$

נציב את הערכים שקיבלנו ב $C_1e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ונקבל $-2xe^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + -e^{-4x}\cdot e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix} -2x-1 \\ 4x-2 \end{pmatrix}$.

הפתרון הכללי של המערכת הוא $C_1e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-x}\begin{pmatrix} -2x-1 \\ 4x-2 \end{pmatrix}$.

<u>תרגיל ממבחן תשע"ג מועד ב</u>

מצא את הפתרון הכללי של מערכת משוואות דיפרנציאליות $\begin{cases} x' = 3x + 2y + e^t + e^{5t} \\ y' = x + 2y - e^t \end{cases}$

<u>פתרון</u>

נמצא תחילה פתרון כללי למערכת ההומוגנית $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

נמצא תחילה את הערכים העצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4).$$

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור $\lambda = 1$ ז"א יש למצוא את הבסיס של מרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, לאחר דירוג נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ והבסיס של מרחב האפס הוא $B = \{(-1,1)\}$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור $\lambda = 4$ ז"א יש למצוא את הבסיס של מרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, לאחר דירוג נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ והבסיס של מרחב האפס הוא $B = \left\{ (2,1) \right\}$.

הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא $y = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$.

נמצא פתרון פרטי למערכת.

נמצא פתרון בעזרת שיטת הניחוש: הפתרון יהיה מהצורה
$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 te^t + \alpha_2 e^{5t} \Rightarrow x' = \alpha_1 e^t + \alpha_1 te^t + 5\alpha_2 e^{5t} \\ y &= \beta_1 te^t + \beta_2 e^{5t} \Rightarrow y' = \beta_1 e^t + \beta_1 te^t + 5\beta_2 e^{5t} \end{aligned}$$

נציב במערכת $\begin{cases} x' = 3x + 2y + e^t + e^{5t} \\ y' = x + 2y - e^t \end{cases}$ ונקבל
$$\begin{cases} \alpha_1 e^t + \alpha_1 te^t + 5\alpha_2 e^{5t} = 3\left(\alpha_1 te^t + \alpha_2 e^{5t}\right) + 2\left(\beta_1 te^t + \beta_2 e^{5t}\right) + e^t + e^{5t} \\ \beta_1 e^t + \beta_1 te^t + 5\beta_2 e^{5t} = \alpha_1 te^t + \alpha_2 e^{5t} + 2\left(\beta_1 te^t + \beta_2 e^{5t}\right) - e^t \end{cases}$$

נשווה את המקדמים של e^t ונקבל $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -1 \end{cases}$.

נשווה את המקדמים של te^t ונקבל $\begin{cases} \alpha_1 = 3\alpha_1 + 2\beta_1 \\ \beta_1 = \alpha_1 + 2\beta_1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} -2\alpha_1 = 2\beta_1 \\ -\beta_1 = \alpha_1 \end{cases} \Leftarrow \beta_1 = -\alpha_1$. סה"כ נקבל $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -1 \end{cases}$.

נשווה את המקדמים של e^{5t} ונקבל $\begin{cases} 5\alpha_2 = 3\alpha_2 + 2\beta_2 + 1 \\ 5\beta_2 = \alpha_2 + 2\beta_2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2\alpha_2 = 2\beta_2 + 1 \\ 3\beta_2 = \alpha_2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \beta_2 = -\frac{1}{4} \\ \alpha_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$

הפתרון הפרטי של המערכת הלא הומוגנית:
$$\begin{aligned} x &= te^t - \frac{3}{4} e^{5t} \\ y &= -te^t - \frac{1}{4} e^{5t} \end{aligned}$$

הפתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית $y = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} e^{5t}$.

<u>**תרגול 9**</u>

<u>**מערכת משוואות ליניאריות עם תנאי התחלה**</u>

<u>**הגדרה**</u>

תהיי נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} y_1'=\sum_{l=1}^{n} a_{1l}y_l+b_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_n'=\sum_{l=1}^{n} a_{nl}y_l+b_n(t) \end{cases}$ כאשר $b_i(t)$ $(1\le i\le n)$ הם פונקציות נתונות בקטע פתוח I. בעיית ערך התחלתי ליניארית היא מערכת המשוואות הנ"ל יחד עם n תנאי ההתחלה:

$\begin{cases} y_1(t_0)=x_1^0 \\ . \\ . \\ . \\ y_n(t_0)=x_n^0 \end{cases}$ כאשר t^0 נקודה נתונה בקטע I, ו $x_1^0,...,x_n^0$ הם n מספרים נתונים.

<u>**תרגיל**</u>

מצא פתרון למערכת $\begin{cases} y_1'=y_1+y_2 \\ y_2'=4y_1+y_2 \end{cases}$ עם תנאי ההתחלה $\begin{cases} y_1(0)=5 \\ y_2(0)=-2 \end{cases}$.

<u>**פתרון**</u>

ראינו תרגול שעבר שהפתרון הכללי של המערכת הנ"ל הוא $C_1e^{-x}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2e^{3x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

על פי הנתון $C_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$. נפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} C_1+C_2=5 \\ -2C_1+2C_2=-2 \end{cases}$ ונקבל $C_1=3, C_2=2$ והפתרון הוא $3e^{-x}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+2e^{3x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=e^{-x}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}+e^{3x}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

<u>**תרגיל ממבחן תשע"ג מועד א**</u>

נתונה מערכת משוואות דיפרנציאליות $\begin{cases} x'=2x-y-1 \\ y'=4x-2y \end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות.

ב. מצאו את $x(1)$ ו $y(1)$ אם נתון תנאי שפה $x(0)=1, y(0)=2$.

<u>**פתרון**</u>

<u>**סעיף א**</u>

נמצא תחילה את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית $\begin{cases} x'=2x-y \\ y'=4x-2y \end{cases}$.

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה $\begin{pmatrix}2&-1\\4&-2\end{pmatrix}$. $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1\\-4&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2$.

קיבלנו $\lambda=0$ הוא ערך עצמי עם ריבוי 2.

הפתרון הוא מהצורה $\begin{cases} x=c_1+c_2t \\ y=c_3+c_4t \end{cases}\Leftarrow\begin{cases} x'=c_2 \\ y'=c_4 \end{cases}$ נציב במשוואה ונקבל $\begin{cases} c_2=2c_1+2c_2t-c_3-c_4t \\ c_4=4c_1+4c_2t-2c_3-2c_4t \end{cases}\Leftarrow c_4=2c_2$

נשווה את המשתנים החופשיים במשוואה הראשונה ונקבל $c_2 = 2c_1 - c_3$.

הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא $\begin{cases} x = c_1 + c_2 t \\ y = 2c_1 - c_2 + 2c_2 t \end{cases}$.

נפתור בעזרת ווריאציית המקדמים כאשר הפתרון הכללי של ההומוגני הוא $c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}t\\-1+2t\end{pmatrix}$

מהתרגול הקודם נקבל $c'_1(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c'_2(t)\begin{pmatrix}t\\-1+2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow c'_2(t) = -2 \Rightarrow c_2(t) = -2t$.

$c'_1(t) = 2t - 1 \Rightarrow c_1(t) = t^2 - t$. הפתרון הפרטי הוא $(t^2 - t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2t\begin{pmatrix}t\\-1+2t\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t^2 - t \\ y = -2t^2 \end{cases}$

הפתרון הכללי הוא $\begin{cases} x = c_1 + c_2 t - t^2 - t \\ y = 2c_1 - c_2 + 2c_2 t - 2t^2 \end{cases}$.

<u>סעיף ב</u>

נתון $x(0) = 1, y(0) = 2$ ולכן $c_1 = 1, c_2 = 0$ הפתרון הוא $\begin{cases} x = 1 - t - t^2 \\ y = 2 - 2t^2 \end{cases}$ ואז $x(1) = -1$ ו $y(1) = 0$.

תרגול 10

משוואה ליניארית מסדר 2 עם מקדמים לא קבועים

$y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_2(x)y(x)=0$ נמצא פתרון של המשוואה על ידי טור חזקות סביב x_0.

כלומר הפתרון של המשוואה הוא מהצורה $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$.

תרגיל ממבחן תשע"ג מועד א

נתונה משוואה דיפרנציאלית $y''-xy'+4y=0$.

א. פתרו את המשוואה בעזרת טור חזקות סביב $x_0=0$. רשמו את נוסחת הנסיגה ואת ארבעת האיברים הראשונים של הטור.

ב. כתבו את הפתרון כסכום של שני פתרונות בלתי תלויים.

פתרון

סעיף א

הפתרון הוא מהצורה $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \Leftarrow y'=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1} \Leftarrow y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}$.

נציב במשוואה $y''-xy'+4y=0$ ונקבל $\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}-x\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}+4\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0$.

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}4a_kx^k=0 \Rightarrow 2a_2+\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k-\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^k+4a_0+\sum_{k=1}^{\infty}4a_kx^k=0$$

נשווה מקדמים ונקבל $\begin{cases}a_2+2a_0=0\\(k+2)(k+1)a_{k+2}-ka_k+4a_k=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_2+2a_0=0\\a_{k+2}=\dfrac{(k-4)a_k}{(k+2)(k+1)}\end{cases}$.

ארבעת האיברים הראשונים של הטור הם: $a_0,a_1x,-2a_0x^2,-\frac{a_1x^3}{2}$.

סעיף ב

הפתרון הוא $y=a_0\left(1-2x^2+\frac{1}{3}x^4+o\left(x^6\right)\right)+a_1\left(x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{40}x^5+o\left(x^7\right)\right)$.

פתרון המשוואה עבור נקודות סינגולריות

נתונה המשוואה $y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_2(x)y(x)=0$.

נקודות סינגולריות הן נקודות אי רציפות של הפונקציות $p_1(x),p_2(x)$.

$x=x_0$ נקראת נקודה סינגולרית רגולרית אם שתי הגבולות $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p_1(x),\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2p_2(x)$ קיימות.

סביב נקודה סינגולרית רגולרית ניתן לקבל פתרון של המשוואה מהצורה $y=(x-x_0)^r\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$.

<u>תרגיל</u>

נתונה משוואה דיפרנציאלית $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$.

א. פתרו את המשוואה בעזרת טור חזקות סביב $x_0=0$. רשמו את נוסחת הנסיגה ואת ארבעת האיברים הראשונים של הטור.

ב. כתבו את הפתרון כסכום של שני פתרונות בלתי תלויים.

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

$y''-\frac{1}{2x}y'+\frac{(x-5)}{2x^2}y=0$. נבדוק תחילה שהנקודה $x_0=0$ היא סינגולרית רגולרית.

נשים לב ש: $p_1(x)=-\frac{1}{2x},\ p_2(x)=\frac{x-5}{x^2}$. $\lim_{x\to0}\left(x\cdot-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{2},\lim_{x\to0}\left(x^2\cdot\frac{x-5}{2x^2}\right)=-\frac{5}{2}$ ז"א שתי הגבולות

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p_1(x),\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2p_2(x)$ קיימות והנקודה $x_0=0$ היא סינגולרית רגולרית.

הפתרון הוא מהצורה $y=(x-0)^r\sum_{k=0}^{\infty}(x-0)^r\cdot(x-0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}$.

$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}\Rightarrow y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r-1}\Rightarrow y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}$.

נציב במשוואה ונקבל

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+r)}{2}a_kx^{k+r-2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(x-5)}{2}x^{k+r-2}=0 .$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+r)}{2}a_kx^{k+r-2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2}x^{k+r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-5a_k}{2}x^{k+r-2}=0$$

מהשוואת המקדמים של x^{r-2} נקבל $r(r-1)a_0-\frac{ra_0}{2}-\frac{5a_0}{2}=0\Rightarrow r^2-\frac{3r}{2}-\frac{5}{2}=0\Rightarrow 2r^2-3r-5=0$.

נקבל $(2r-5)(r+1)=0$ ז"א $r_1=-1,r_2=\frac{5}{2}$.

מהשוואת המקדמים של x^{k+r-2} עבור $1\le k$ נקבל

$$(k+r)(k+r-1)a_k-\frac{k+r}{2}a_k+\frac{a_{k-1}}{2}-\frac{5a_k}{2}=0$$
$$\left[2\left(k^2+2kr+r^2-k-r\right)-k-r-5\right]a_k=-a_{k-1}$$
$$\left(2k^2+4kr+2r^2-3k-3r-5\right)a_k=-a_{k-1}$$
$$a_k=\frac{-a_{k-1}}{2k^2+4kr+2r^2-3k-3r-5}$$

ארבעת האיברים הראשונים עבור $r=-1$: $a_0x^{-1},\frac{a_0}{5},\frac{a_0x}{30},\frac{a_0x^2}{90}$.

ארבעת האיברים הראשונים עבור $r=\frac{5}{2}$: $a_0x^{\frac{5}{2}},\frac{-a_0x^{\frac{7}{2}}}{9},\frac{a_0x^{\frac{9}{2}}}{198},\frac{-a_0x^{\frac{11}{2}}}{7722}$.

סעיף ב

$$c_1\left(x^{-1}+\frac{1}{5}+\frac{x}{30}+\frac{x^2}{90}+o\left(x^3\right)\right)+c_2\left(x^{\frac{5}{2}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{9}+\frac{x^{\frac{9}{2}}}{198}-\frac{x^{\frac{11}{2}}}{7722}+o\left(x^{\frac{13}{2}}\right)\right).$$

הערה

נניח ב.ה.ג.כ. ש $r_2 \le r_1$

1. אם $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ נקבל שני פתרונות בלתי תלויים כפי שקיבלנו בתרגיל הקודם.

2. אם $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ נקבל שני פתרונות בלתי תלויים:

$$y_1 = \left(x-x_0\right)^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(x-x_0\right)^k$$
$$y_2 = \left(x-x_0\right)^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty} a^*_k\left(x-x_0\right)^k + cy_1\ln\left|x-x_0\right|$$

3. אם $r_1 - r_2 = 0$ נקבל שני פתרונות בלתי תלויים:

$$y_1 = \left(x-x_0\right)^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(x-x_0\right)^k$$
$$y_2 = \left(x-x_0\right)^{r_1+1}\sum_{k=0}^{\infty} a^*_k\left(x-x_0\right)^k + cy_1\ln\left|x-x_0\right|$$

תרגול 11

בעיית שטרום ליוביל

הגדרה

$Lu:=-\left(p(x)u'\right)'+q(x)u=-\lambda u$ הוא מד"ר ליניארי מסדר שני שנקרא אופרטור שטרום ליאוביל.

המספר הממשי $\lambda\in\mathbb{R}$ נקרא ערך עצמי של Lu אם קיים פתרון לא טרוויאלי למשוואה $-\left(p(x)u'\right)'+q(x)u=\lambda^2 u$ כאשר נתונים תנאי שפה . הפתרון הלא טרויאלי נקרא פונקציה עצמית של Lu.

תנאי השפה הם: $\begin{cases}\alpha y(a)+\beta y'(a)=0 & \alpha^2+\beta^2\neq 0\\ \gamma y(b)+\delta y'(b)=0 & \gamma^2+\delta^2\neq 0\end{cases}$

תרגיל

מצא כל הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות למערכת $\begin{cases}y''=-\lambda y\\ y(0)=0\\ y'(1)=0\end{cases}$

פתרון

נחלק למקרים:

מקרה 1: $\lambda=0$

במקרה זה נקבל את המשוואה $y''=0 \Leftarrow y=c_1x+c_2$.

מהנתון $y(0)=0$ נקבל $c_2=0$ ומהנתון $y'(1)=0$ נקבל $c_1=0$. קיבלנו ש $y=0$ הוא הפתרון הטרויאלי.

מקרה 2: $\lambda<0$

במקרה זה נקבל את המשוואה $y''+\lambda y=0$ והפתרון הוא $y=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

מהנתון $y(0)=0$ נקבל $c_1+c_2=0$, מהנתון $y'(1)=0$ נקבל

$$\sqrt{-\lambda}c_1e^{\sqrt{-\lambda}}-c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}}=0 \Leftarrow y'=\sqrt{-\lambda}c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}-c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

נציב $c_1=-c_2$ ונקבל $\Leftarrow -\sqrt{-\lambda}c_2e^{\sqrt{-\lambda}}-c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}}=0 \Leftarrow c_2\left(e^{\sqrt{-\lambda}}+e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)=0 \Leftarrow c_2=0 \Leftarrow c_1=0$.

ושוב קיבלנו את הפונקציה הטרויאלית.

מקרה 3: $\lambda>0$

במקרה זה נקבל את המשוואה $y''+\lambda y=0$ והפתרון הוא $y=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$.

מהנתון $y(0)=0$ נקבל $c_1\cos\sqrt{\lambda}=0$. אם $c_1=0$ נקבל את הפונקציה $y=c_2\sin\sqrt{\lambda}x$.

מהנתון $y'(1)=0$ נקבל $y'=c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \Leftarrow c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$.

$c_2\neq 0$ כי אחרת נקבל את הפתרון הטריויאלי, $\lambda>0$ ולכן $\cos\sqrt{\lambda}=0 \Leftarrow \sqrt{\lambda}=\frac{\pi}{2}+n\pi \Leftarrow \lambda=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2$.

הערכים העצמיים הם $\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2$.

אם $c_1 \neq 0$ נקבל $\cos\sqrt{\lambda} = 0$ ומהנתון $y'(1) = 0$ נקבל $-c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$.

מכיוון ש $\cos\sqrt{\lambda} = 0$ נקבל $-c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} = 0$. מכיוון ש $\cos\sqrt{\lambda} = 0$ אז $\sin\sqrt{\lambda} \neq 0$.

ומכיוון ש $c_1 \neq 0$ נקבל $\sqrt{\lambda} = 0$ בסתירה לכך ש $\lambda > 0$.

בהכרח $c_1 = 0$ והפונקציות העצמיות הן $y_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)x$.

תרגול 12

בעיית חום על קטע סופי

תרגיל ממבחן תשע"ג מועד ב

פתרו את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 & 0 < x > \dfrac{\pi}{2}, t > 0 \\ u(x,0) = 1 + 2\cos(2x) & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ u_x(0,t) = 0 & t \ge 0 \\ u_x\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = 0 & t \ge 0 \end{cases}$$

פתרון

נשתמש שיטת הפרדת משתנים $u(x,t) = X(x)T(t)$.

נגזור לפי t ונקבל $u_t = XT'$. נגזור פעמיים לפי x ונקבל $u_{xx} = X''T$.

נציב במשוואה המקורית $XT' = 3X''T \Leftarrow \dfrac{3X''}{X} = \dfrac{T'}{T}$.

באגף שמאל של המשוואה נקבל פונקציה של x ובאגף ימין נקבל פונקציה של t.

נקבל בהכרח פונקציה קבועה, כלומר: $\begin{cases} \dfrac{3X''}{X} = -\lambda \\ \dfrac{T'}{T} = -\lambda \end{cases}$ קיבלנו בעיית שטרום ליוביל.

מקרה 1: $\lambda = 0$, נקבל את המערכת $\begin{cases} X'' = 0 \\ T' = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} X = a_1x + a_2 \\ T = a_3 \end{cases} \Leftarrow u(x,t) = (a_1x + a_2)a_3 \Leftarrow u_x(x,t) = a_1a_3$.

מהתנאי $u_x(0,t) = 0, u_x\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = 0$ נקבל $a_1a_3 = 0$. אם $a_3 = 0$ נקבל את הפתרון הטריוויאלי, ולכן $a_1 = 0$.

נקבל $\lambda = 0$ ערך עצמי והפונקציה הקבועה היא פונקציה עצמית.

מקרה 2: $\lambda < 0$ ואז נקבל את מערכת המשוואות $\begin{cases} 3X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \lambda T = 0 \end{cases}$.

במקרה זה פתרון המשוואה הראשונה הוא $X = c_1e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}x} + c_2e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}x} \Leftarrow X' = \sqrt{-\dfrac{\lambda}{3}}c_1e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}x} - \sqrt{-\dfrac{\lambda}{3}}e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}x}$.

מכיוון ש $u_x(0,t) = 0$ נקבל ש $X'(0) = 0$ ז"א $\sqrt{-\dfrac{\lambda}{3}}c_1 - \sqrt{-\dfrac{\lambda}{3}}c_2 = 0 \Leftarrow c_1 - c_2 = 0 \Leftarrow c_1 = c_2$.

מכיוון ש $u_x\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = 0$ נקבל ש $X'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ ז"א $c_1\sqrt{-\dfrac{\lambda}{3}}e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}\cdot\frac{\pi}{2}} - c_2\sqrt{-\dfrac{\lambda}{3}}e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}\cdot\frac{\pi}{2}} = 0$ מכיוון ש $c_1 = c_2$.

נקבל $c_1\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}\left(e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}\cdot\frac{\pi}{2}}-e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}\cdot\frac{\pi}{2}}\right)=0$. מצב כנ"ל לא יכול להתקיים מכיוון ש: $\lambda<0$, אם $c_1=c_2=0$ אז נקבל את הפתרון

הטריוויאלי והפתרון היחידי למשוואה $e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}\cdot\frac{\pi}{2}}-e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}\cdot\frac{\pi}{2}}$ הוא $\lambda=0$ בניגוד לכך ש $\lambda<0$.

מקרה 3: $\lambda>0$ ואז נקבל את המערכת $\begin{cases}3X''+\lambda X=0\\ T'+\lambda T=0\end{cases}$.

במקרה זה פתרון המשוואה הראשונה הוא $X=c_1\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}x\right)$.

הפתרון של המשוואה השנייה הוא $T=e^{-\lambda t}\Leftarrow u(x,t)=\left(c_1\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}x\right)\right)e^{-\lambda t}$.

$$u_x(0,t)=c_2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}e^{-\lambda t}\Leftarrow u_x(x,t)=\left(-c_1\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}x\right)+c_2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}x\right)\right)e^{-\lambda t}$$

מכיוון ש $u_x(0,t)=0$ נקבל ש $c_2=0\Leftarrow c_2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}e^{-\lambda t}=0$ ז"א

$$u_x(x,t)=-c_1\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}x\right)e^{-\lambda t}\Leftarrow u(x,t)=c_1\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}x\right)e^{-\lambda t}.$$

מכיוון ש $u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0$ נקבל $-c_1\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)e^{-\lambda t}=0$ מכיוון שאם $c_1=0$ נקבל את הפתרון הטריוויאלי אז

$\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow\sqrt{\frac{\lambda}{3}}=2n\Rightarrow\lambda_n=12n^2$ כאשר $n\in\mathbb{N}$ הם הערכים העצמיים.

הפונקציות העצמיות הן: $u_n(x,t)=a_n\cos(2nx)e^{-12n^2t}$.

יחד עם מקרה 1 נקבל שהערכים העצמיים הם: $\lambda_n=12n^2$ כאשר $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

הפונקציות העצמיות הן: $u_n(x,t)=a_n\cos(2nx)e^{-12n^2t}$.

הפתרון הכללי הוא מהצורה $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(2nx)e^{-12n^2t}\Rightarrow u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(2nx)$.

נתון ש $u(x,0)=1+2\cos(2x)$ ולכן $a_0=1,a_1=2$ ולכל $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ נקבל $a_n=0$.

ז"א התשובה היא: $u(x,t)=1+2\cos(2x)e^{-12t}$.

תרגול 13

משוואת חום במוט בלתי מוגבל

נתונה בעיית חום במוט אינסופי

$$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

פתרון המשוואה הוא $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy$.

תרגיל ממבחן מועד א תשע"ג

פתרון הבעיה ההתחלה $u(x,0) = \varphi(x), t > 0, -\infty < x < \infty, u_t = a^2 u_{xx}$ ניתן למצוא בעזרת נוסחת Green במוט בלתי מוגבל.

א. מצאו צורה של גל החום בזמן $t = 1$ כך שתנאי ההתחלה הוא $u(x,0) = \varphi(x) = e^{-x^2}$.

ב. פתרו את הבעיה שפה למשוואת חום $t > 0, x > 0, u_t = a^2 u_{xx}$ כך ש $u(0,t) = 0$ עם תנאי ההתחלה $u(x,0) = e^{-x^2}$ על פי הנוסחה מסעיף א.

פתרון

סעיף א

על פי הנוסחה $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy$ נקבל

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy$$

$$u(x,1) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 - 2xy + y^2 + 4a^2 y^2}{4a^2}} dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2}}}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{-2xy + y^2 + 4a^2 y^2}{4a^2}} dy =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2}}}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{-2xy + y^2 + 4a^2 y^2}{4a^2}} dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2}}}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\frac{x}{\sqrt{1+4a^2}} - \sqrt{1+4a^2}\, y}{2a}\right)^2 + \frac{x^2}{4a^2(1+4a^2)}} dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2} + \frac{x^2}{4a^2(1+4a^2)}}}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\frac{x}{\sqrt{1+4a^2}} - \sqrt{1+4a^2}\, y}{2a}\right)^2} dy$$

נציב $z = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+4a^2}} - \sqrt{1+4a^2}\, y}{2a} \Leftarrow dz = -\frac{\sqrt{1+4a^2}}{2a} dy$

נקבל

$$-\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2} + \frac{x^2}{4a^2(1+4a^2)}}}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{1+4a^2}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-z} dy = \frac{e^{\frac{-4a^2 x^2}{4a^2(1+4a^2)}}}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{1+4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z} dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{1+4a^2}}}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{1+4a^2}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{e^{-\frac{x^2}{1+4a^2}}}{\sqrt{1+4a^2}}$$

סעיף ב

עבור פונקציה כלשהי $t(x)$ מתקיים $\int_{-\infty}^{\infty} t(x)dx = \int_0^{\infty} t(x)dx + \int_{-\infty}^{0} t(x)dx = \int_0^{\infty} t(x)dx + \int_0^{\infty} t(-x)dx = \int_0^{\infty}\left(t(x)+t(-x)\right)dx$.

במקרה שלנו ידוע לנו שבהינתן תנאי התחלה $\psi(x)$ המוגדר בתחום $-\infty < x < \infty$ מתקיים

נשים לב ש $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}dy$ במקרה זה $t(y) = \psi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$ ואז $t(-y) = \psi(-y)e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}}$

כמו שהראינו מקודם נקבל $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left(\psi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} + \psi(-y)e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}}\right)dy$

תנאי ההתחלה הוא $u(0,t) = 0$ ולכן

$$u(0,t)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left(\psi(y)e^{-\frac{y^2}{4a^2t}} + \psi(-y)e^{-\frac{y^2}{4a^2t}}\right)dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left(\psi(y)+\psi(-y)\right)e^{-\frac{y^2}{4a^2t}}dy = 0$$

ז"א אנחנו צריכים פונקציה אי זוגית כדי שהמשוואה הנ"ל תהייה נכונה ואנחנו צריכים שעבור $0 < y$ יתקיים $\psi(y) = \varphi(y)$ כדי שנוכל להיעזר במה שקיבלנו כדי לפתור את הבעיה שלנו.

נשלים את הפונקציה $\varphi(y)$ לפונקציה אי זוגית, כלומר

ונקבל $\psi(y) = \begin{cases} \varphi(y) & y > 0 \\ -\varphi(-y) & y < 0 \end{cases}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left(\psi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} + \psi(-y)e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}}\right)dy$$

מכיוון שהפונקציה $\psi(y)$ אי זוגית נקבל $\psi(-y) = -\psi(y)$ כלומר $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left(\psi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} - \psi(y)e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}}\right)dy$

עבור $0 < y$ $\psi(y) = \varphi(y)$ ולכן

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left(\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} - \varphi(y)e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}}\right)dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}}\right)dy =$$