פתרון תרגיל בית 6 אלגברה מופשטת 2

1. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$. כאשר $S = \{n^k \mid k = 0,1,2,\dots\}$.

(א) מהם האידיאלים ב$\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]$?

לפי ההתאמה בין אידיאלים, האידיאלים ב $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]$ הם בהתאמה לאידיאלים ב$\mathbb{Z}$ הזרים ל$S = \{7^i\}$ שהם $n\mathbb{Z}$ עבור n הזרים ל7.

ולכן האידיאלים אצלנו הם מהצורה $n\mathbb{Z}[\frac{1}{7}] = \{\frac{nk}{7^i} \mid k \in \mathbb{Z}, i = 0,1,2,\dots\}$ עבור n הזרים ל7.

(ב) הוכיחו כי עבור מספר ראשוני p, לא קיים תח"ש R כך ש $\mathbb{Z} \subsetneqq R \subsetneqq \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$.

נניח $\mathbb{Z} \subseteq R \subsetneqq \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. נשים לב שאם $\frac{1}{p} \in R$ אז $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ (למה?) ולכן אנחנו מניחים $\frac{1}{p} \notin R$.

כעת נניח $0 \neq \frac{a}{p^k} \in R$ עבור $(a,p) = 1$,

מכיוון ש $\frac{p^{k-1}}{1} \in R$ אז גם המכפלה $\frac{p^{k-1}}{1} \cdot \frac{a}{p^k} = \frac{a}{p} \in R$.

מכיוון ו a, p זרים, $k_1 a + k_2 p = 1$

ולכן $\frac{1}{p} = k_1 \frac{a}{p} + k_2 \frac{p}{p} \in R$ בסתירה להנחה.

(ג) הוכיחו כי אם $m|n$ אז $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}] \subseteq \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ ושאם $n \nmid m^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$ אז זוהי הכלה ממש.

נרשום $n = m \cdot k$. נשים לב כי $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ והאיבר m הפיך שם - שכן $\frac{m}{1} \cdot \frac{k}{n} = 1$

.

ולכן כל האיברים ב$S = \{m^i\}$ הפיכים שם.

ולכן (מהאוניברסליות של מיקום) $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}] \subseteq \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$.

כעת נניח כי $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$. בפרט $\frac{1}{n} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.

כלומר ש $\frac{1}{n} = \frac{a}{m^k}$ לאיזשהו $k \in \mathbb{N}$ (בהכרח $k \neq 0$ כי אחרת $\frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$ שזו שטות).

זה אומר ש $m^k = an$ כלומר ש $n \mid m^k$.

(ד) מהו היחס ($=, \subseteq, \supseteq$) בין $\mathbb{Z}[\frac{1}{18}]$ ו $\mathbb{Z}[\frac{1}{12}]$?

נטען כי $\mathbb{Z}[\frac{1}{18}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{12}]$.
כי לפי הסעיף הקודם הם שניהם שווים ל $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ (השלימו את הפרטים).

(ה) מצאו שרשרת חוגים $\mathbb{Z}[\frac{1}{n_1}] \subsetneq \mathbb{Z}[\frac{1}{n_2}] \subsetneq \mathbb{Z}[\frac{1}{n_3}] \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{Q}$.
לפי סעיף קודם, אם ניקח

$$\begin{aligned} n_1 &= 2 \\ n_2 &= 2 \cdot 3 \\ n_3 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

וכן n_k יהיה מכפלת k המספרים הראשוניים הראשונים, נקבל שרשרת $\mathbb{Z}[\frac{1}{n_1}] \subsetneq \mathbb{Z}[\frac{1}{n_2}] \subsetneq \mathbb{Z}[\frac{1}{n_3}] \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{Q}$.

2. (א) הוכיחו כי $\langle x^2 - 2 \rangle$ הוא אידיאל ראשוני ב$\mathbb{R}[x]$.

אפשר להוכיח כי המנה $\mathbb{R}[x]/\left\langle x^2 - 2 \right\rangle$ איזומורפית ל $\mathbb{R}[\sqrt{2}]$ שהיא תח"ש, ולכן האידיאל ראשוני.

(ב) מיהו האידיאל המקסימלי במיקום $\mathbb{R}[x]_{\langle x^2-2 \rangle}$?
האידיאלים במיקום הם כל האידיאלים ב$\mathbb{R}[x]$ המוכלים ב $\langle x^2 - 2 \rangle$, ולכן המקסימלי הוא

$$\left\langle x^2 - 2 \right\rangle \mathbb{R}[x]_{\langle x^2-2 \rangle} = \left\{ \frac{(x^2-2)f(x)}{(x^2-2)^k} \right\}$$

(ג) נסמן ב M את האידיאל מהסעיף הקודם. למה איזומורפית המנה $\mathbb{R}[x]_{\langle x^2-2 \rangle}/M$?
לפי טענה מההרצאה $\mathbb{R}[x]_{\langle x^2-2 \rangle}/M \cong \mathbb{R}[x]/\left\langle x^2 - 2 \right\rangle \cong \mathbb{R}[\sqrt{2}]$.
(ודאו שאתם מבינים את הפרטים).

3. יהי $d \in \mathbb{N}$ חופשי מריבועים, הוכח ששדה השברים של $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ הוא $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.
פתרון:
נסמן את שדה השברים של $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ב F.
$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ הוא שדה המכיל את $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ולכן $F \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.
כעת ניקח $\frac{a}{b} + \frac{x}{y}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, אזי

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y}\sqrt{d} = \frac{ay + bx\sqrt{d}}{by} \in F$$

4. נניח $S^{-1}R$ הוא חוג מקומי. האם הוא $R_{(P)}$ לאיזשהו אידיאל ראשוני P?

פתרון:

לפי ההתאמה בין אידיאלים, האידיאל המקסימלי הוא מהצורה $S^{-1}P$ עבור אידיאל $R \lhd P$ שזר לS.

P הוא אידיאל מקסימלי ביחס לתכונה שהוא זר לS ולכן הוא ראשוני.

נטען ש $S^{-1}R \cong R_{(P)}$. מכיוון ש$S \cap P = \emptyset$,

$S \subseteq R \setminus P$ ולכן $S^{-1}P \hookrightarrow R_{(P)}$ (כי כל איברי S בבירור הפיכים שם).

מצד שני, עם $r \in R \setminus P$ אז $r = (1, r) \notin S^{-1}P$

(למה? נניח $(1, r) \sim (s, p)$ אז $rs = p$ אבל P ראשוני ולכן $r \in P$ או $s \in P$ - סתירה.)

ולכן הוא איבר הפיך. וזה מבטיח ש$S^{-1}R \hookrightarrow R_{(P)}$.

5. יהי R חוג קומוטטיבי. ויהיו $I, J \lhd R$ אידיאלים.

עבור אידיאל ראשוני P, $I_{(P)}, J_{(P)}$ הם האידיאלים המתאימים במיקום $R_{(P)}$.

הוכיחו כי אם לכל אידיאל ראשוני P מתקיים $I_{(P)} = J_{(P)}$ אזי $I = J$.

פתרון:

נוכיח ע"י הכלה דו-כיוונית.

נניח בשלילה $I \nsubseteq J$ כלומר שיש $x \in I \setminus J$.

נתבונן באידיאל $(J : x) = \{r \in R \,|\, rx \in J\}$ (למה זה אידיאל? למה הוא אמיתי?)

ונשים לב שהוא מכיל את J.

נקח את האידיאל המקסימלי שמכיל אותו $(J : x) \subseteq M$.

אזי לפי ההנחה $I_{(M)} = J_{(M)}$ נובע ש $(1, x) \in J_{(M)}$

כלומר ש $(1, x) \sim (r, j) \Leftarrow xr = j \Leftarrow r \in (J : x) \subseteq M$

בסתירה לכך ש$r \in R \setminus M$.

6. יהי R תחו"ש ו $S \subseteq R$ תת חוג.

(א) הוכיחו כי קיים שיכון $q(S) \subseteq q(R)$.

$q(R)$ הוא שדה ויש שיכון $q(R) \hookrightarrow S \subseteq R$.

ולכן יש שיכון $q(S) \hookrightarrow q(R)$.

(ב) הוכיחו כי יש שיוויון אם"ם לכל $0 \neq x \in R$ יש $s \in S$ כך ש $xs \in S$.

נניח כי $q(R) = q(S)$. ונקח $0 \neq x \in R$.

אזי $\frac{x}{1} \in q(R) = q(S)$ כלומר שיש $s, s' \in S$ כך ש $\frac{x}{1} = \frac{s}{s'}$

שזה בדיוק אומר ש $xs' = s \in S$ כדרוש.

מצד שני, נניח את התכונה. כבר ראינו $q(S) \subseteq q(R)$ ולכן נשאר להוכיח רק

את ההכלה ההפוכה.
נראה ש $R \subseteq q(S)$ וזה יראה (בדומה לסעיף הקודם) ש $q(R) \subseteq q(S)$.
נקח $0 \neq x \in R$ (שימו לב שברור שאיבר האפס נמצא ב$q(S)$),
לפני ההנחה יש $s \in S$ כך ש$xs = s' \in S$
שזה אומר ש $x = \frac{s'}{s} \in q(S)$ כמו שרצינו.