פתרון אלגברה מופשטת - תרגיל 2

שאלה 1

א) האם קיים מונומורפיזם מ- $GL_5(\mathbb{Q})$ ל-$(\mathbb{Q}^5,+)$? (כאשר-$\mathbb{Q}^5=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$).

ב) האם קיים אפימורפיזם מ-$(M_5(\mathbb{Q}),+)$ ל- $(\mathbb{Q}^5,+)$?

פתרון:

. א) נניח שקיים כזה מונומורפיזם f. תמונה מונומורפית של חבורה תמיד איזומורפית לחבורה עצמה

(למשל, כי הגרעין = {1} ועל פי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל ש-
.($GL_2(Q)/\ker(f)=GL_2(Q)/\{1\}\cong GL_2(Q)\cong \operatorname{Im}(f)$)

אבל התמונה היא תת-חבורה של הטווח ולכן קיבלנו שלחבורה האבלית $(Q^5,+)$ יש תת-חבורה לא אבלית, וזו סתירה.

לכן לא קיים מונומורפיזם.

ב) צריך למצוא אפימורפיזם מ- $(M_5(Q),+)$ ל- $(Q^5,+)$. ראשית, שימו לב ש- $(M_5(Q),+)$ איזומורפי ל- $(Q^{25},+)$: פשוט שימו את כל איברי המטריצה בשורה אחת בת 25 כניסות (ז"א – וקטור ב- Q^{25}).

קל לראות שזהו איזומורפיזם. שנית, נגדיר את האפימורפיזם $f: (Q^{25},+) \rightarrow (Q^5,+)$ על ידי

$f((a_1,\ldots,a_{25}))=(a_1,\ldots,a_5)$

(בדקו שזהו הומומורפיזם ושהוא על).

שאלה 2

בדקו אם החבורות הבאות הן ציקליות (אם הן ציקליות, מצאו לפחות יוצר אחד. אם לא, הוכיחו זאת), ומצאו כמה יוצרים יש להן אם כן:

א) $\Omega_{101},\Omega_{102}$

ב) $\left\langle cis\frac{17\pi}{25}\right\rangle,\left\langle cis\pi\sqrt{3}\right\rangle$

ג) U_{20}

ד) $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{15}$

פתרון:

א) ל- Ω_n יש $\varphi(n)$ יוצרים. לכן צריך לחשב את

$\varphi(102) = \varphi(2*51) = \varphi(2)*\varphi(51) = 1*50 = 50.$

$\varphi(101) = 101-1=100.$

ב) $<cis(17\pi/25)>$ היא חברה ציקלית מסדר 50, מכיוון ש-50 הוא המספר הטבעי המינימלי n כך ש-

n*17π/25 הוא כפולה של 2π ולכן $cis(17\pi/25)^{50} = cis(34\pi)=1$. לכן מספר היוצרים שלה הוא $\varphi(50) = 20$.

$<cis(\pi\sqrt{3})>$ היא חבורה ציקלית. אם היא הייתה מסדר סופי, אז היה קיים n טבעי כך ש-

$cis(\pi\sqrt{3})^n = cis(2\pi) =1 \rightarrow cis(n\pi\sqrt{3}) = cis(2\pi)$

אבל $\sqrt{3}$ אינו מספר רציונלי ולכן הסדר של החבורה הוא אינסופי. לכן היא איזומורפית ל-Z ולכן יש לה שני יוצרים (שהם $cis(\pi\sqrt{3})$ ו- $(cis(\pi\sqrt{3})-)$.

ג) $U_{20} = \{1,3,7,9,11,13,17,19\}$. הסדר של חבורה זו הוא 8. נשים לב ש- (mod 20) מתקיים

13 = 7- ,17 = 3- ,19 = 1- ,11 = 9-. הסדר של 3,7,9 הוא או 2 או 4 (בדקו זאת!)

(למשל: $3^4=81=1(mod\ 20)$) ולכן גם הסדר של 17,13,11. הסדר של 19 = 1- הוא 2.

לכן U_{20} איננה ציקלית.

ד) הפעולה בחבורה זו היא חיבור רכיב-רכיב (כאשר ברכיב הראשון זהו חיבור מודולו 10 ובשני מודולו 15). נשים לב שלכל $(a,b)\in Z_{10}\times Z_{15}$ מתקיים

$"(a,b)^{30}" = 30*(a,b) = (30a,30b) = (0,0)$

לכן הסדר המקסימלי של כל איבר הוא 30 ומכיוון שסדר החבורה הוא 150 אזי היא אינה ציקלית.

<u>שאלה 3</u>

א) יהיו $H,K \leq G$ תת חבורות. נגדיר את הקבוצה $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$. הוכיחו: HK תת חבורה של G אם ורק אם $HK = KH$.

ב) הסיקו מסעיף א' כי אם N ת"ח נורמלית של G ו- H ת"ח של G אז HN ת"ח של G.

ג) הוכיחו כי אם N_1, N_2 תח"נ של G אז $N_1 \cap N_2$ ו- N_1N_2 תח"נ של G.

<u>פתרון:</u>

א. כזכור, כדי להוכיח ש-H (תת-קבוצה לא ריקה) היא ת"ח של G מספיק להוכיח שלכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b\in H$ וש- $a^{-1}\in H$. הוכיחו ראשית שתנאי זה שקול לכך שמספיק להוכיח שלכל $a,b\in H$ מתקיים: $a*b^{-1}\in H$.

נפתור עתה את השאלה:

<u>שימו לב</u>: אם נתון ש- HK=KH **אין זה אומר** שלכל h∈H, k∈K מתקיים: hk=kh.

כל מה שאפשר להסיק מנתון זה הוא שאם h∈H, k∈K אז קיימים h'∈H, k'∈K כך ש- hk = k'h'.

<u>:⇐</u>

$$1=1*1\in HK\neq\phi$$
$$h_1k_1,h_2k_2\in HK\Rightarrow h_1k_1(h_2k_2)^{-1}=h_1\underbrace{k_1k_2^{-1}}_{\in K}h_2^{-1}=$$
$$[let:\ \ k_3=k_1k_2^{-1},h_3=h_2^{-1}]=h_1\underbrace{k_3h_3}=$$
$$[Note:\ \ HK=KH\ \ implies:\exists h_4\in H,k_4\in K\ \ such\ that:k_3h_3=h_4k_4]=$$
$$\underbrace{h_1h_4}_{\in H}k_4\in HK\Rightarrow HK\leq G$$

<u>:⇒</u> ראשית נשים לב שעבור חבורה X : $X=X^{-1}=\{a^{-1}\mid a\in X\}$

ולכן : $G\geq HK=(HK)^{-1}=\underbrace{K}_{\leq G}{}^{-1}\underbrace{H}_{\leq G}{}^{-1}=KH$

ב. הוכחה: N נורמלית לכן $HN=NH$. לפי סעיף א' (בהינתן ת"ח H_1,H_2, הקבוצה H_1H_2 היא ת"ח אמ"ם $H_1H_2=H_2H_1$) נקבל כי HN אכן תת-חבורה.

ג. חיתוך:

נתון $N_1\lhd G,\mathrm{N}_2\lhd G$, צריך למצוא כי $N_1\cap N_2\lhd G$. אנחנו כבר יודעים שחיתוך של ת"ח הוא ת"ח, כלומר $N_1\cap N_2\leq G$ ונשאר רק למצוא כי $N_1\cap N_2$ נורמלית. יהיו $h\in N_1\cap N_2$, $g\in G$. צ"ל כי $ghg^{-1}\in N_1\cap N_2$. $h\in N_1\cap N_2$ לכן $h\in N_1$ וכיוון ש-N_1 נורמלית נקבל $ghg^{-1}\in N_1$. באותו האופן מהנורמליות של N_2 נקבל $ghg^{-1}\in N_2$. לכן סה"כ $ghg^{-1}\in N_1\cap N_2$ כדרוש.

מכפלה:

נתון $N_1\lhd G,\mathrm{N}_2\lhd G$, צריך למצוא כי $N_1N_2\lhd G$. שימו לב כי לפי סעיף ב' $N_1N_2\leq G$ ולכן נשאר רק להראות ש- N_1N_2 נורמלית. יהיו $h\in N_1N_2$, $g\in G$. צ"ל כי $ghg^{-1}\in N_1N_2$. כיוון ש- $h\in N_1N_2$ קיימים $h_1\in N_1,h_2\in N_2$ כך ש- $h=h_1h_2$. כיוון ש- N_1 נורמלית נקבל $gh_1g^{-1}\in N_1$ וכיוון ש- N_2 נורמלית נקבל $gh_2g^{-1}\in N_2$. לכן $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})=gh_1h_2g^{-1}=h\in N_1N_2$ כפי שרצינו להראות.

<u>שאלה 4</u>

(1) תהי $\mathbb{Q}$ חבורת המספרים הרציונליים (עם פעולת החיבור), ותהי $\mathbb{Z}$ (חבורת המספרים השלמים) תת חבורה שלה.

א. הוכיחו שב- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ כל איבר הוא מסדר סופי.

ב. הראו כי התת חבורה הנוצרת ע"י המחלקות של $\frac{1}{4}$ ו- $\frac{1}{6}$ היא ציקלית.

מהו הסדר של תת חבורה זו ?

(2) נתבונן ב- $G = GL_2(\mathbb{Q}, \cdot)$ ובתת-החבורה $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q}\right\}$. חשבו את $[G:H]$.

<u>פתרון:</u>

(1) דוגמא לאיבר ב- Q/Z = מחלקה שמאלית: 1/4 + Z.

א) נזכור שאיבר היחידה ב- Q/Z הוא המחלקה 0+Z=Z ולכן צריך לכל איבר x∈Q/Z למצוא n כך ש- n*x = Z (זכרו שהפעולה פה היא חיבור (של מחלקות), ולכן ה"חזקה" ב- n היא כפל ב- n). כל איבר בחבורת המנה הזו נוכל לכתוב באופן הבא: $\frac{a}{b}+Z, a,b \in Z, b>0$. אזי $b(\frac{a}{b}+Z) = a+Z = Z$.

לכן $\frac{a}{b}+Z$ הוא לכל היותר מסדר b.

ב) זו חבורה הנוצרת על ידי המחלקה 1/12 + Z (מדוע?). הסדר שלה = 12.

(2)

if $g_b = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in Q \setminus \{0\}$ then $g_b H = \begin{pmatrix} b & ba \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

לכן, אם c,d הם שני מספרים רציונליים (שונים מאפס) כך ש- c≠d , אז cH ≠ dH. לכן מספר המחלקות של H ב-G הוא לפחות מספר המספרים ב-Q ולכן [G:H] = ∞.

<u>שאלה 5</u>

א) תנו דוגמא לחבורה סופית G ותת-חבורה H המראות שההתאמה $Hx \to xH$ אינה בהכרח מוגדרת היטב.

ב) תנו דוגמא לחבורה (אינסופית) שיש לה תת קבוצה סגורה ביחס לפעולה, שאיננה תת חבורה.

<u>פתרון:</u>

א) ראשית – שימו לב: העתקה f היא מוגדרת היטב אם כשמתקיים a=b אז f(a) = f(b).

נקח את החבורה הדיהדרלית $G = D_3 = <\sigma, \tau>$ ואת התת חבורה שלה H הנוצרת ע"י τ (השיקוף),

ז"א $H=\{1,\tau\}$. נסמן ההתאמה xH → Hx ב- f.

נכתוב את המחלקות השמאלית והימנית של σ ביחס ל- H.

$\sigma H=\{\sigma,\sigma\tau\}$

$H\sigma=\{\sigma,\tau\sigma\}$. לכן – f(σH) = Hσ.

עתה, נשים לב ש- $\sigma\tau H=\{\sigma\tau,\sigma\tau^2\}=\{\sigma\tau,\sigma\}=\sigma H$. מצד שני,

$f(\sigma\tau H)=H\sigma\tau=\{\sigma,\tau\sigma\tau\}\neq H\sigma=f(\sigma H)$. ז"א ש- f אינה מוגדרת היטב.

ב) ניקח את G = (Z,+) ואת H = (N,+).

$H\subset G$ ו- H סגורה ביחס לחיבור, אך H איננה חבורה ולכן H אינה תת חבורה של G.

<u>שאלה 6</u>

א) פתרו: $28^{301}x\equiv 2004\ (\mathrm{mod}\ 99)$

ב) פתרו באמצעות משפט אוילר את המשוואה:

$9999x=3737373737^{9999}+2011\ (\mathrm{mod}\ 40)$

ג) באמצעות משפט אוילר מצאו את 2 הספרות האחרונות של המספר $2011+8073767^{1999}$

ד) הוכיחו או הפריכו: $70!+1$ מתחלק ב- 71, $116!+1$ מתחלק ב- 117.

ה) פתרו את המשוואה $a^3xb=ab^2ab$ בחבורה S_3 כאשר

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u>

א) צריך לפתור את המשוואה:

$28^{301}x = 2004(\mathrm{mod}\ 99)$

זוהי משוואה ב- U_{99}. מכיון ש- $28 \in U_{99}$, ומכיוון ש- $\varphi(99)=60$, על פי משפט אוילר נקבל ש-

$28^{60}=1 \pmod{99}$. לכן $28^{300}=1 \pmod{99}$ ולכן: $28^{301}=28 \pmod{99}$.

קל לחשב ש- $2004 = 24 \pmod{99}$. לכן צריך לפתור את המשוואה:

$28x = 24 \pmod{99}$

נמצא את $(28)^{-1}$ ב- U_{99}, ז"א נחפש את $a \in U_{99}$ כך ש- $28a = 1 \pmod{99}$. משוואה זו שקולה למצוא $a,b \in Z$ כך ש- $28a + 99b = 1$. שימו לב שלמעשה אנו מבקשים פה למצוא את המקדמים a,b כאשר אנו מביעים את $\gcd(28,99)=1$ כצירוף לינארי של 28 ו- 99. כאן צריך להפעיל את אלגוריתם אוקלידס (עם מציאת מקדמים), כפי שראינו בכיתה. אחרי חישוב מקבלים ש-

$1 = 46*28 – 13*99$.

לכן $a = 46$ וזהו $(28)^{-1}$ ב- U_{99}.

לכן את המשוואה

$28x = 24 \pmod{99}$

נכפיל ב- $46 = (28)^{-1}$ ונקבל:

$x = 24*46 \pmod{99} = 1104 \pmod{99} = 15 \pmod{99}$.

ב) מתקיים $3737373737 \equiv 17 \pmod{40}$, $9999 \equiv 39 \pmod{40}$ אז המשוואה היא למעשה:

$39x = 17^{9999} + 11 \pmod{40}$. נשתמש במשפט אוילר: $9999 = 624 \cdot 16 + 15 \ \wedge \ \varphi(40) = 16$

ולכן $17^{9999} = \left(17^{16}\right)^{624} \cdot 17^{15} = 1 \cdot 17^{16} \cdot 17^{-1} = 17^{-1}$. קל לראות שההופכי של 17 מודולו 40 הוא 33, ולכן המשוואה המתקבל היא: $39x \equiv 33 + 11 \pmod{40} = 4 \pmod{40}$ וקל לראות ש- $x = 36$

ג) צריך למצוא את 2 הספרות האחרונות של $8073767^{1999} + 2011$ כלומר לחשב את $8073767^{1999} + 2011 \pmod{100}$ כלומר את $67^{1999} + 11 \pmod{100}$. נמצא את $67^{1999} \pmod{100}$: נחשב כי $\varphi(100) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 40$ ונקבל לפי משפט אוילר ש-
$67^{1999} \equiv 67^{40 \cdot 50 - 1} \equiv (67^{40})^{50} \cdot 67^{-1} \equiv 67^{-1} \pmod{100}$. כלומר נשאר למצוא את ההפכי של 67 ב- U_{100}. כלומר מחפשים מספר $x \in \mathbb{Z}$ כך ש- $67x = 1 \pmod{100}$ כלומר $100 \mid 67x - 1$ כלומר צ"ל $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ כך ש- $100y = 67x - 1$ כלומר $67x + 100y = 1$. שימו לב כי $1 = (67{,}100)$ לכן אנו בעצם צריכים לבטא את ה-gcd של 67,100 כצירוף לינארי של 67,100. באמצעות אלגוריתם אוקלידס המורחב נמצא כי $x = 3, y = 2$ כלומר ההפכי של 67 ב- U_{100} הוא 3. לסיכום נקבל כי

$8073767^{1999}+2011\,(\bmod 100)\equiv 67^{-1}+11\equiv 3+11\equiv 14\,(\bmod 100)$, כלומר שתי הספרות האחרונות של המספר הן 14.

ד) ניזכר במשפט וילסון: n מחלק את $(n+1)!+1$ אמ"ם $n+1$ ראשוני. 71 ראשוני לכן $70!+1$ מתחלק ב-71, 117 לא ראשוני לכן $116!+1$ לא מתחלק ב- 117.

ה) נשים לב ש- $a^2=id$ ולכן $a^3=a$. לכן צריך לפתור את המשוואה:

$$axb = ab^2ab \rightarrow x = b^2a = b^{-1}a = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 7</u>

תהי D_4 החבורה הדיהדרלית ויהיו $\sigma,\tau\in D_4$ (כאשר τ איבר מסדר 2 – שיקוף, ו- σ איבר מסדר 4 – סיבוב ב- 90 מעלות).

נגדיר את תתי החבורות הציקליות $H=\langle\tau\rangle$, $K=\langle\sigma^2\rangle$.

א) כתבו במפורש את אברי תתי החבורות H,K וחשבו את $[D_4:H],[D_4:K]$.

ב) כתבו את המחלקות השמאליות של H,K ב- D_4. האם הן תת חבורות נורמליות?

<u>פתרון:</u>

א. $H=\{e,\tau\}$

$K=\{e,\sigma^2\}$

לפי משפט לגרנז' אם $H\le G$ אז $[G:H]=\frac{|G|}{|H|}$:

במקרה שלנו $[G:H]=\frac{|G|}{|H|}=\frac{8}{2}=4$

ו- $[G:K]=\frac{|G|}{|K|}=\frac{8}{2}=4$.

ב.

I) המחלקות השמאליות של H ב-G הן:

$H=\{e,\tau\},\sigma\cdot H=\{\sigma,\sigma\tau\},\sigma^2\cdot H=\{\sigma^2,\sigma^2\tau\},\sigma^3\cdot H=\{\sigma^3,\sigma^3\tau\}$

H אינה נורמלית ב- G כי:

$\{\sigma,\sigma\tau\}=\sigma\cdot H\neq H\cdot\sigma=\{\sigma,\tau\sigma\}=\{\sigma,\sigma^3\tau\}$.

II) המחלקות השמאליות של K ב- G הן:

$K=\{e,\sigma^2\},\sigma\cdot K=\{\sigma,\sigma^3\},\tau\cdot K=\{\tau,\tau\sigma^2\},\tau\sigma\cdot K=\{\tau\sigma,\tau\sigma^3\}$

ניתן לבדוק שכל המחלקות הימניות שוות לשמאליות (של אותו איבר ביחס ל- K) ולכן K נורמלית.

אנחנו נבדוק את התנאי לנורמליות: לכל $g\in G,k\in K$ מתקיים $gkg^{-1}\in K$.

עבור $e\in K$ התנאי מתקיים לכל $g\in G$ ($geg^{-1}=e\in K$)

נראה שהתנאי מתקיים ל- $\sigma^2\in K$ ולכל $g\in G$.

את כל אברי G ניתן להציג כ- $g=\sigma^n$ או $g=\tau\sigma^n$ עבור $n=0,1,2,3$

כאשר $g=\sigma^n$ ברור שהתנאי מתקיים.

כאשר $g=\tau\sigma^n$ מקבלים ש- $gkg^{-1}=(\tau\sigma^n)\sigma^2(\tau\sigma^n)^{-1}=\tau\sigma^n\sigma^2\sigma^{-n}\tau^{-1}=\tau\sigma^2\tau=\sigma^2\in K$

ולכן התנאי מתקיים ו- K נורמלית ב- G .

<u>שאלה 8</u>

תארו את הקוסטים השמאליים של חבורה G לגבי ת"ח H:

א. $G=4\mathbb{Z},H=12\mathbb{Z}$

ב. $G=\mathbb{R}^2,H=\{(t,3t)\mid t\in\mathbb{R}\}$

ג. $G=X_1\times X_2,H=X_1\times\{e\}$ (X_1,X_2 חבורות)

ד. $G=U_{20},H=<\overline{11}>$.

<u>פתרון:</u>

א) המחלקות הן $\{12\mathbb{Z},4+12\mathbb{Z},8+12\mathbb{Z}\}$

ב) המחלקות הן:

$$\left\{(a,b)+(t,3t):(a,b)\in\mathbb{R}\right\}=\left\{(a+t,b+3t):a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{(x,y):y=3x+b-3a\ ,\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

משמע, אלה הם ישרים עם שיפוע 3.

ג) המחלקות הן: $\left\{(a,b)\cdot\left(X_1\times\{e\}\right):a\in X_1,b\in X_2\right\}=\left\{aX_1\times\{b\}\right\}=\left\{X_1\times\{b\}:b\in X_2\right\}$

ולכן קבוצת המחלקות איזומורפית ל- X_2.

ד) $U_{20}=\{1,3,7,9,11,13,17,19\}$ ו- $\{1,11\}=\langle 11\rangle$. לכן יש 4 מחלקות:

$\langle 11\rangle,\ 3\langle 11\rangle=\{3,13\},\ 7\langle 11\rangle=\{7,17\},\ 9\langle 11\rangle=\{9,19\}$.

שאלה 9

א) תהי D_4 החבורה הדיהדרלית. חשבו את טבלת הכפל שלה.

ב) מהו $Z(D_4)$? הוכיחו. (באשר $Z(G)$ הוא המרכז של החבורה G)

פתרון:

א. חישוב טכני.

ב. $Z(D_4)=\{1,b^2\}$(ניתן לראות זאת מלוח הכפל).

שאלה 10

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן הומומורפיזמים ומצאו אם הן חח"ע ו/או על:

א) $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(\mathbb{C}^*,\cdot)$ המוגדרת ע"י: $f(x)=x^5$

ב) $f:(\mathbb{Q}^*,\cdot)\to(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ המוגדרת ע"י: $f(x)=x^5$

ג) $f:\mathbb{Z}_6\to G$ באשר $G=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$ והפונקציה מוגדרת ע"י $x\to\begin{pmatrix}1&0&x\ (\mathrm{mod}\ 3)\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

פתרון

הבדיקה שהפונקציות בכל אחד מהסעיפים הן הומומורפיזמים היא פשוטה. בנוגע לחח"ע/על:

(א) לא חח"ע, כן על.　　(ב) כן חח"ע, לא על.　　(ג) לא חח"ע, לא על.

<u>שאלה 11</u>

בתרגיל בית הקודם, בשאלה 4, הוכחתם כי $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in R, a^2+b^2>0\right\}$ חבורה.

הוכיחו כי $G\cong\mathbb{C}^*$.

<u>פתרון</u>

נבנה איזומורפיזם מפורש בין שתי החבורות. נגדיר $\varphi: G\to\mathbb{C}^*$ ע"י $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\to a+bi$. ברור שזו פונקציה חח"ע ועל, נשאר רק להראות כי זהו הומומורפיזם: יהיו $M_1=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c\end{pmatrix}$, צ"ל כי $\varphi(M_1M_2)=\varphi(M_1)\varphi(M_2)$. אכן, מצד אחד $\varphi(M_1)\varphi(M_2)=(a+bi)(c+di)=ac-bd+i(ad+bc)$ ומצד שני,

$$\varphi(M_1M_2)=\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c\end{pmatrix})=\varphi(\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac\end{pmatrix})=ac-bd+i(ad+bc)$$

כדרוש.

<u>שאלת בונוס</u> (10 נק')

הגדרה: חבורה G היא פשוטה אם אין לה ת"ח נורמליות לא-טריוואליות.

נתון כי $G_1\subseteq G_2\subseteq G_3\subseteq ....$ חבורות פשוטות. הוכיחו כי $G=\bigcup_n G_n$ חבורה פשוטה.

<u>פתרון</u>

(ראשית, $G=\bigcup_n G_n$ חבורה: נבדוק למשל סגירות. יהיו $a,b\in G$. $a\in G$ לכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $a\in G_n$. כמו כן $b\in G$ לכן קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $b\in G_m$. עבור $s=\max(n,m)$ נקבל כי $a,b\in G_s$, וכיוון ש- G_s חבורה מתקיימת בה סגירות כלומר $ab\in G_s$ לכן $ab\in G$. באופן דומה מוכיחים את שאר התכונות של חבורה.)

כעת לשאלה עצמה: צריך להראות כי G פשוטה כלומר שאין לה ת"ח נורמליות לא טריוואליות. תהי $N\lhd G$, נראה כי N טריוואלית. ראשית, מתקיים $N\cap G_n\lhd G_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ (לפי כך שאם G חבורה, H ת"ח של G, ו- N ת"ח נורמלית של G, אז $N\cap H$ ת"ח נורמלית של H). כיוון ש- G_n פשוטות, עבור כל n האופציות היחידות הן $N\cap G_n=\{e\}$ או $N\cap G_n=G_n$.

נחלק ל-2 מקרים:

1) קיים $i \in \mathbb{N}$ עבורו $N \cap G_i = G_i$. נבחר את i להיות המינימאלי המקיים זאת. כלומר לכל $k < i$ מתקיים $N \cap G_i = \{e\}$, ולכל $k \geq i$ מתקיים $N \leq G_k$ (הסבר: $N \cap G_i = G_i$ לכן $N \leq G_i$. כמו כן $G_i \leq G_k$ לכל $k > i$ ולכן $N \leq G_k$). אז קיבלנו:

$$N = N \cap G = N \cap (\bigcup_n G_n) = \bigcup_n (N \cap G_n) = (\bigcup_{k=1}^{i-1} N \cap G_k) \cup (\bigcup_{k=i}^{\infty} N \cap G_k) = \{e\} \cup \bigcup_{k=i}^{\infty} G_k = \bigcup_{k=i}^{\infty} G_k = G$$

כלומר $N = G$ היא טריוואלית.

2) לא קיים $i \in \mathbb{N}$ עבורו $N \cap G_i = G_i$, כלומר $N \cap G_i = \{e\}$ לכל $i \in \mathbb{N}$. אבל אז $N = N \cap G = N \cap (\bigcup_n G_n) = \bigcup_n (N \cap G_n) = \bigcup_n \{e\} = \{e\}$ כלומר $N = \{e\}$ היא טריוואלית.