## **הרצאה 6**

### פונקציות

### הגדרה

פונקציה היא שלשה סדורה $(A,B,G)$, כאשר $A,B$ הן קבוצות, ו $G$ היא תת קבוצה של $A\times B$. (שימו לב ש $G$ היא יחס מ $A$ ל $B$), כך שלכל $x\in A$ קיים $y\in B$ יחיד, המקיים $(x,y)\in G$.

הקבוצה $A$ תיקרא תחום הפונקציה, הקבוצה $B$ תיקרא טווח הפונקציה, $G$ תיקרא גרף הפונקציה.

תהיי $f$ פונקציה. נסמן את תחומה ב $D(f)$ ואת טווחה ב $Ra(f)$.

### דוגמה

הפונקציה - $f=\left([-1,1],[0,6],\left\{\left(x,x^4\right)\middle|x\in[-1,1]\right\}\right)$.

התחום - $D(f)=[-1,1]$.

הטווח - $Ra(f)=[0,6]$.

הגרף - $\left\{\left(x,x^4\right)\middle|x\in[-1,1]\right\}$.

### הגדרה

הקבוצה $\operatorname{Im}(f)=\left\{y\in Ra(f)\middle|\exists x\in D(f):(x,y)\in G\right\}$ נקראת קבוצת התמונות של הפונקציה.

שימו לב: $\operatorname{Im}(f)\subseteq Ra(f)$.

בדוגמה הקודמת $\operatorname{Im}(f)=[0,1]$.

### סימונים

תהיי $f$ פונקציה $(A,B,G)$ במקרה זה נסמן $f:A\to B$. ($A$ הוא התחום של הפונקציה ו $B$ הוא הטווח של הפונקציה) שימו לב: $\operatorname{Im}(f)\subseteq B$.

לכל $x$ בתחום של $f$, נסמן ב $f(x)$ את האיבר היחיד $y$ בטווח, כך ש $(x,y)\in G$.

### דוגמה

בדוגמה הקודמת לכל $x\in[-1,1]$ מתקיים $f(x)=x^4$ ו $f:[-1,1]\to[0,6]$.

### תרגיל

תהיי $A=\{-1,0,1,2\}$, ותהיי $f:A\to\mathbb{R}$ הפונקציה $f(x)=x^2$. (ניתן לרשום גם $x\mapsto x^2$)

רשום את גרף הפונקציה בצורה מפורטת.

### פתרון

$G=\{(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$ שימו לב: $\operatorname{Im}(f)=\{0,1,4\}, D(f)=\mathbb{R}, Ra(f)=\{-1,0,1,2\}$.

### שוויון פונקציות

נאמר שהפונקציות $f:A\to B$ ו $g:C\to D$ הן שוות אם:

1. $A=C$.
2. $B=D$.
3. לכל $x\in A$ מתקיים $f(x)=g(x)$.

### דוגמאות

1. הפונקציות $f:\{0,1\}\to\{0,1,2\}, g:\{0,1\}\to\{0,1\}$ כאשר $f(x)=g(x)=x^2$ הן פונקציות שונות מכיוון שהן בעלי טווחים שונים.
2. הפונקציות $f:\{0,1\}\to\{0,1\}, g:\{0,1\}\to\{0,1\}$ כאשר $f(x)=x^4, g(x)=x^2$ שוות.

**הגדרה**

תהי $f$ פונקציה מ $A$ ל $B$, יהיו $x\in A$ ו $y\in B$ כך ש $f(x)=y$, דהיינו, $(x,y)$ שייך לגרף של $f$.

אנו נקרא ל $y$ התמונה של $x$ ע"י $f$, ול $x$ המקור של $y$ ע"י $f$.

**דוגמה**

אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $f(x)=x^4-1$ אז 7 הוא התמונה של 2 ו 2,-2 הם המקורות של 7.

**הגדרה**

פונקציה $f:A\to B$ תיקרא פונקציה מ $A$ על $B$, או בקיצור פונקציה על, אם $imf=B$.

**דוגמאות**

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $f(x)=2x+1$ היא פונקציה על מכיוון שעבור $a\in\mathbb{R}$ נקבל ש $f\left(\frac{a-1}{2}\right)=a$.
2. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ כך ש $f(x)=2x+1$ היא לא על מכיוון שאין $x\in\mathbb{Z}$ שעבורו $f(x)=2$.
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ כך ש $f(x)=2x+1$ לא פונקציה מכיוון ש $f\left(\frac{1}{3}\right)\notin\mathbb{Z}$.

**הגדרה**

פונקציה $f:A\to B$ תיקרא פונקציה חד חד ערכית (חח"ע), אם $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.

**דוגמאות**

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $f(x)=2x+1$ היא פונקציה חח"ע מכיוון ש
$f(x_2)=f(x_1)\Rightarrow 2x_2+1=2x_1+1\Rightarrow x_2=x_1$.
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $f(x)=x^2$ לא פונקציה חח"ע מכיוון ש $f(-1)=f(1)$ אבל $-1\neq 1$.

**הגדרה**

תהיי $f:A\to B$, ויהיו $D\subseteq B, C\subseteq A$.

התמונה של $C$ ע"י $f$ (שתסומן $f[C]$) היא הקבוצה $\{f(x)\in B | x\in C\}$.

התמונה ההפוכה של $D$ ע"י $f$ (שתסומן $f^{-1}[D]$) היא הקבוצה $\{x\in A | f(x)\in D\}$.

**דוגמאות**

1. תהיי $f:A\to B$ פונקציה כאשר $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{1,2,3,4\}$ שעבורה מתקיים
$f(1)=f(2)=f(3)=4, f(4)=2, f(5)=3$ אז:
א. $f[\{1\}]=\{4\}$.
ב. $f[\{1,2\}]=\{4\}$.
ג. $f[\{3\}]=\{4\}$.
ד. $f^{-1}[\{1\}]=\phi$.
ה. $f^{-1}[\{4\}]=\{1,2,3\}$.
ו. $f^{-1}[\{1,4\}]=\{1,2,3\}$.

2. $f[\phi]=\phi$.
3. $f^{-1}[\phi]=\phi$.

**תרגיל**

יהיו $A,B$ קבוצות, $f:A\to B$ פונקציה ו $C_1,C_2\subseteq A$.

הוכח:

א. אם $C_1\subseteq C_2$ אז $f[C_1]\subseteq f[C_2]$.

ב. $f[C_1\cup C_2]=f[C_1]\cup f[C_2]$.

ג. $f[C_1\cap C_2]\subseteq f[C_1]\cap f[C_2]$.

**פתרון**

א. נניח ש $C_1\subseteq C_2$. יהיה $y\in f[C_1]$ ז"א קיים $x\in C_1$ כך ש $f(x)=y$. נתון ש $C_1\subseteq C_2$ ולכן $x\in C_2$ ומכיוון ש $f(x)=y$ נקבל ש $y\in f[C_2]$.

ב. נוכיח תחילה ש $f[C_1]\cup f[C_2]\subseteq f[C_1\cup C_2]$. על פי הגדרת האיחוד $C_1\subseteq C_1\cup C_2\wedge C_2\subseteq C_1\cup C_2$ ומסעיף א $f[C_1]\subseteq f[C_1\cup C_2]\wedge f[C_2]\subseteq f[C_1\cup C_2]$ ומהגדרת האיחוד נקבל ש $f[C_1]\cup f[C_2]\subseteq f[C_1\cup C_2]$.

נוכיח כעת ש $f[C_1\cup C_2]\subseteq f[C_1]\cup f[C_2]$. נניח ש $y\in f[C_1\cup C_2]$ ז"א קיים $x\in C_1\cup C_2$ כך ש $f(x)=y$. מכיוון ש $x\in C_1\cup C_2$ נקבל ש $x\in C_1\vee x\in C_2$ אם $x\in C_1$ אז מכיוון ש $f(x)=y$ נקבל ש $y\in f[C_1]$. אם $x\in C_2$ אז מכיוון ש $f(x)=y$ נקבל ש $y\in f[C_2]$. סה"כ קיבלנו ש $y\in f[C_1]\vee y\in f[C_2]$ ז"א $y\in f[C_1]\cup f[C_2]$.

ג. על פי הגדרת החיתוך $C_1\cap C_2\subseteq C_1\wedge C_1\cap C_2\subseteq C_2$ ומסעיף א נקבל ש $f[C_1\cap C_2]\subseteq f[C_1]\wedge f[C_1\cap C_2]\subseteq f[C_2]$ ז"א $f[C_1\cap C_2]\subseteq f[C_1]\cap f[C_2]$.

**דוגמאות**

נתבונן בדוגמה הקודמת:

$$f[\{1\}\cap\{3\}]=\phi\subset f[\{1\}]\cap f[\{3\}]=\{4\}.$$

$$f[\{1\}\cap\{1,2\}]=f[\{1\}]=\{4\}=f[\{1\}]\cap f[\{1,2\}]$$

**משפט**

אם $A$ קבוצה סופית ו $f:A\to B$ היא פונקציה חד-חד-ערכית, אז מספר איברי $A$ אינו עולה על מספר איברי $B$.

**הוכחה**

אם $A$ ריקה, מספר איבריה הוא 0. מספר איברי $B$ אינו יכול להיות שלילי, לכן מספר איברי $A$ אינו עולה על זה של $B$.

אם $A$ אינה ריקה, יהיו $a_1,...,a_n$ כל איבריה השונים. מכיוון ש $f$ חח"ע, $f(a_1),...,f(a_n)$ הם $n$ איברים שונים של $B$, לכן יש ב $B$ לפחות $n$ איברים, ואכן מספר איברי $A$ אינו עולה על מספר איברי $B$.

**משפט**

אם $A$ קבוצה, $B$ קבוצה סופית, ו $f:A\to B$ היא פונקציה מ $A$ על $B$, אז מספר איברי $A$ אינו נופל ממספר איברי $B$.

**הוכחה**

אם $B$ ריקה, גם $A$ ריקה מכיוון שאם $A\neq\phi$ אז $f:A\to B$ לא יכולה להיות פונקציה כי אם $A\neq\phi$ אז קיים $a\in A$ ומכיוון ש $B=\phi$ לא קיים $b\in B$ כך ש $(a,b)\in G$ בסתירה להגדרת פונקציה.

אם $B$ אינה ריקה, יהי $n$ מספר איבריה ויהיו $b_1,b_2,...,b_n$ כל איבריה השונים זה מזה. $f$ היא על, לכן לכל $1\le k\le n$, $f^{-1}\left[\{b_k\}\right]$ אינה ריקה ולכן קיים $a_k\in f^{-1}\left[\{b_k\}\right]$. נניח ש $a_i=a_j$ ז"א $a_i\in f^{-1}\left[\{b_i\}\right]\wedge a_j\in f^{-1}\left[\{b_j\}\right]$ ולכן $f(a_i)=b_i\wedge f(a_j)=b_j$ מכיוון ש $f$ פונקציה ומכיוון ש $a_i=a_j$ נקבל ש $f(a_i)=f(a_j)$ ז"א $b_i=b_j$ ומכיוון ש $b_1,b_2,...,b_n$ שונים זה מזה נקבל ש $i=j$, לכן יש ב $A$ לפחות $n$ איברים.

**מסקנה**

אם יש פונקציה חח"ע מ $A$ על $B$, ואחת משתי הקבוצות סופיות, גם האחרת סופית ובעלת אותו מספר איברים.

**משפט**

אם $A$ ו $B$ הן קבוצות סופיות, אז:

א. $|A|=|B|$, אם ורק אם קיימת פונקציה חח"ע מ $A$ על $B$.

ב. נניח ש $A\ne\phi$. $|A|\le|B|$, אם ורק אם קיימת פונצקיה חח"ע מ $A$ ל $B$.

ג. נניח ש $B\ne\phi$. $|A|\le|B|$, אם ורק אם קיימת פונקציה מ $B$ על $A$.

**הוכחה**

א. אם $A=\phi$ אז הפונקציה $f:\phi\to\phi$ היא חח"ע ועל. אם $A\ne\phi$, אז תהיי $A=\{a_i|1\le i\le n\}$, ותהיי $B=\{b_i|1\le i\le n\}$ הפונקציה $f:A\to B$ כל שלכל $1\le i\le n$ $f(a_i)=b_i$ היא פונקציה חח"ע מ $A$ על $B$.

ב+ג. תהיי $A=\{a_i|1\le i\le n\}$ ותהיי $B=\{b_i|1\le i\le m\}$ כאשר $m\ge n$. הפונקציה $f(a_i)=b_i$ היא חח"ע מ $A$ ל $B$. הפונקציה $g(b_i)=\begin{cases}a_i & i\le n\\ a_1 & n<i\le m\end{cases}$ היא פונקציה מ $B$ על $A$.

**הרכבת פונקציות**

**הגדרה**

יהיו $f:B\to C$ , $g:A\to B$ פונקציות. ההרכבה $f\circ g$ היא פונקציה מ $A$ ל $C$, המוגדרת לכל $x\in A$ ע"י $(f\circ g)(x)=f(g(x))$.

**דוגמה**

$A=\{1,2,3,4\},B=\{5,6,7\},C=\{8,9,10,11\}$.

$g:A\to B$ מוגדרת ע"י $g(1)=g(2)=5,g(3)=g(4)=6$.

$f:B\to C$ מוגדרת ע"י $f(5)=f(6)=8,f(7)=11$.

$f\circ g:A\to C$ מוגדרת ע"י $(f\circ g)(1)=(f\circ g)(2)=(f\circ g)(3)=(f\circ g)(4)=8$.

**הערה**

שימו לב: קיבלנו פונקציה $f\circ g:A\to C$ כך שלכל $x\in A$ $(f\circ g)(x)=8$ ז"א לכל $x\in A$ קיבלנו ערך קבוע.

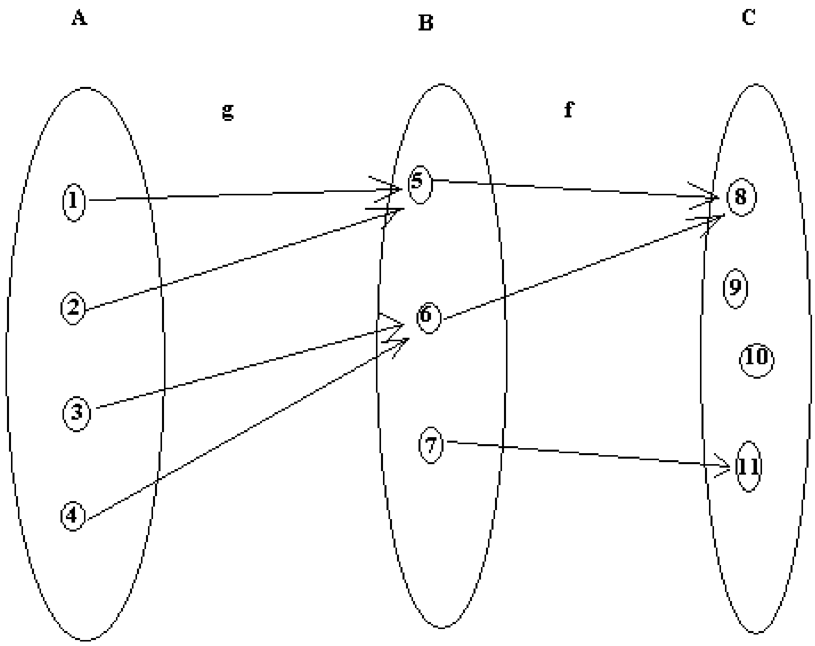
**הגדרה**

תהיי $f:A\to B$ פונקציה. $f$ תיקרא קבועה אם קיים $b\in B$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים $f(x)=b$.

**דוגמה**

בדוגמה הקודמת $f\circ g:A\to C$ היא פונקציה קבועה.

**המחשה**




**משפט**

הרכבת פונקציות היא אסוציאטיבית. כלומר:

יהיו $f:A\to B, g:B\to C, h:C\to D$ פונקציות. אזי: $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

**הוכחה**

נראה תחילה שההרכבה מוגדרת ובשני המקרים נקבל את אותו תחום ואותו טווח.

$(h\circ g)\circ f$: מכיוון ש $g:B\to C, h:C\to D$ אז $(h\circ g):B\to D$ ומכיוון ש $f:A\to B$ אז $((h\circ g)\circ f):A\to D$.

$h\circ(g\circ f)$: מכיוון ש $g:B\to C, f:A\to B$ אז $(g\circ f):A\to C$ ומכיוון ש $h:C\to D$ אז $(h\circ(g\circ f)):A\to D$.

יהי $x\in A$

$$\begin{aligned}((h\circ g)\circ f)(x) &= (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))\\ (h\circ(g\circ f))(x) &= h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x)))\end{aligned}$$

.