תרגיל 3

25 ביולי 2013

1. תהי X קבוצה , $R \subseteq X \times X$ תת קבוצה של זוגות סדורים $X \supseteq Y$. נגדיר $S = R \cap (Y \times Y)$ ־ אלו מבין הטענות הבאות נכונה

   (א) Rיחס טרנזיטיבי על $X \Leftarrow S$ יחס טרנזיטיבי על Y

   (ב) Rיחס רפלקסיבי על $X \Leftarrow S$ יחס רפלקסיבי על Y

   (ג) Rיחס סימטרי על $X \Leftarrow S$ יחס סימטרי על Y

   (ד) Sיחס רפלקסיבי על $Y \Leftarrow R$ יחס רפלקסיבי על X

   (ה) $im(R) = X \Leftarrow im(S) = Y$

   (ו) $dom(R) = X \Leftarrow dom(S) = Y$

   (ז) Rחח"ע$\Leftarrow S$ חח"ע

   (ח) Rיחס שקילות על $X \Leftrightarrow S$ יחס שקילות על Y

2. עבור כל אחד מהקבוצות הבאות ענו האם היא יחס רפלקסיבי, יחס סימטרי, יחס טרנזיטיבי, יחס אנטי סימטרי, יחס שקילות

   (א) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$(יחס על הטבעיים) המוגדר $nRm \Leftrightarrow$קיים מספר טבעי $k > 1$ כך ש k מחלק גם את n וגם את m

   (ב) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המוגדר $nRm \Leftrightarrow |n| \leq m$

   (ג) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$המוגדר $xRy \Leftrightarrow 3|(x + 2y)$

   (ד) עבור קבוצה X לא ריקה. $\emptyset \subseteq X \times X$

   (ה) R יחס על $P(X)$ המוגדר לכל $A, B \subseteq X$ $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \triangle B \subseteq A$

   (ו) עבור X קבוצה $aRb \Leftrightarrow a = b$ (R נקרא יחס הזהות, מסומן לעיתים כ I_X)

   (ז) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$(יחס על זוגות ממשיים) המוגדר $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

3. כמה יחסי שקילות יש על X בהנתן שב X יש 4 איברים?

4. נכון/לא נכון־ אם R יחס סימטרי וטרנזיטיבי אז הוא רפלקסיבי

5. נגדיר יחס על $P(\mathbb{R})$לכל $A, B \subseteq \mathbb{R}$
   $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \cap \{-\pi, 0, 3\} = B \cap \{-\pi, 0, 3\}$
   בדוק שזהו יחס שקילות. כמה איברים יש בקבוצת המנה?

6. נתונה הקבוצה A ואוסף תת־קבוצות שלה $A_1, A_2, \dots A_n$ נגדיר יחס על A.
$\exists i : x \in A_i \wedge y \in A_i \Leftrightarrow xRy$ אלו מהמשפטים הבאים נכון

(א) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A \Leftarrow R$ רפלקסיבי

(ב) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A \Rightarrow R$ רפלקסיבי

(ג) לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset \Leftarrow R$ רפלקסיבי

(ד) לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow R$ טרנזיטיבי

(ה) לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset \Leftarrow R$ טרנזיטיבי

7. נכון/לא נכון תהא $|X| = 2$ ו R יחס על X אזי R טרנזיטיבי

8. נכון/לא נכון . תהא X קבוצה ו R יחס רפלקסיבי וטרנטיבי עליה.
נגדיר יחס S על X־ $aSb \iff aRb \wedge bRa$. אזי S יחס שקילות

9. עבור הפונקציה $f : A \to B$ האם היא חח"ע, על

(א) $A = \mathbb{N} \cup \{0\}, B = \mathbb{Z}$ ו $f(x) = |x|$

(ב) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}$ ו $f(x) = |x|$

(ג) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$ ו $f((x,y)) = x$

(ד) $A = B = P(X)$ עבור Xקבוצה כלשהיא. ו $\forall Y \in P(X),\ f(Y) = X \backslash Y$

10. יהיו A, B קבוצות לא ריקות אילו מבין הבאים נכון

(א) קיימת פונקציה $f : A \to B$

(ב) קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$

(ג) קיימת פונקציה על $f : A \to B$

(ד) קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to A \times B$

(ה) קיימת פונקציה על $f : A \to A \times A$

(ו) אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$ אז קיימת פונקציה חח"ע $g : A \to A \times B$

(ז) אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$ אז קיימת פונקציה חח"ע $g : A \to B \times B$

11. יהיו A, B קבוצות בעלות מספר סופי של איברים אילו מבין הבאים נכון

(א) אם קיים יחס חח"ע $R \subseteq A \times B$ אז $|dom(R)| = |im(R)|$

(ב) אם קיים יחס שאינו חח"ע $R \subseteq A \times B$ אז $|dom(R)| > |im(R)|$

(ג) אם קיים יחס על $R \subseteq A \times B$אז $|dom(R)| = |im(R)|$

פתרון:

1. תהי X קבוצה , $R \subseteq X \times X$ תת קבוצה של זוגות סדורים X. $Y \subseteq X$. נגדיר $S = R \cap (Y \times Y)$ ־ אלו מבין הטענות הבאות נכונה

(א) Rיחס טרנזיטיבי על $X \Leftarrow S$ יחס טרנזיטיבי על Y־נכון
נניח $a, b, c \in Y$ וגם aSb, bSc אזי aRb, bRc כיוון שנתון Rטרנזיטיבי מתקיים aRc ולכן גם aSc

(ב) Rיחס רפלקסיבי על $X \Leftarrow S$ יחס רפלקסיבי על Y־נכון
יהא $a \in Y$ כיוון שנתון Rרפלקסיבי מתקיים aRa ולכן גם aSa

(ג) Rיחס סימטרי על $X \Leftarrow S$ יחס סימטרי על Y־ נכון
נניח $a, b \in Y$ וגם aSb אזי aRb כיוון שנתון Rסימטרי מתקיים bRa ולכן גם bSa

(ד) Sיחס רפלקסיבי על $Y \Leftarrow R$ יחס רפלקסיבי על X־ לא נכון
למשל $\{1, 2\} = X \supset \{1\} = Y$ $R = \{(2, 1), (1, 2)\}$ אזי $Y = \emptyset$ ולכן S רפלקסיבי אך R לא כי $1R2, 2R1$ אבל לא מתקיים $1R1$

(ה) $im(R) = X \Leftarrow im(S) = Y$ ־לא נכון
למשל $\{1, 2\} = X \supset \{1\} = Y$ $R = \{(2, 1), (1, 2)\}$ אזי $Y = \emptyset$

(ו) $dom(R) = X \Leftarrow dom(S) = Y$ ־לא נכון
למשל $\{1, 2\} = X \supset \{1\} = Y$ $R = \{(2, 1), (1, 2)\}$ אזי $Y = \emptyset$

(ז) Rחח"ע$\Leftarrow S$ חח"ע ־נכון
נניח aSx, bSx אזי גם aRx, bRx כיוון שנתון ש R חח"ע נקבל ש $a = b$

(ח) Rיחס שקילות על $X \Leftrightarrow S$ יחס שקילות על Y ־לא נכון
למשל $\{1, 2\} = X \supset \{1\} = Y$ $R = \{(1, 1), (1, 2)\}$ אזי $Y = \{(1, 1)\}$. R אינו רפלקסיבי ולכן לא יחס שקילות, Y כן יחס שקילות

2. עבור כל אחד מהקבוצות הבאות ענו האם היא יחס רפלקסיבי, יחס סימטרי, יחס טרנזיטיבי, יחס אנטי סימטרי, יחס שקילות

(א) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$(יחס על הטבעיים) המוגדר $nRm \Leftrightarrow$קיים מספר טבעי $1 < k$ כך ש k מחלק גם את n וגם את m־ סימטרי
לא רפלקסיבי כי לא מתקיים $1R1$
לא טרנזיטיבי כי $2R6, 6R3$ אבל לא מתקיים $2R3$
לא אנטי־סימטרי כי $2R6, 6R2$ אך לא מתקיים $2 = 6$

(ב) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המוגדר $nRm \Leftrightarrow |n| \leq m$ ־ אנטי סימטרי,טרנזיטיבי
לא רפלקסיבי־ לא מתקיים $(-7)R(-7)$
לא סימטרי־ $(-7)R2$ אבל לא מתקיים $2R(-7)$

(ג) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$המוגדר $xRy \Leftrightarrow 3|(x + 2y)$־ רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, יחס שקילות
רפלקסיבי $3|x + 2x = 3x$
סימטרי־ אם $3|x + 2y$ אזי $x + 2y = 3n$ עבור nשלם כלשהו ואז $-2x - y = x + 2y - (3x + 3y) = 3(n - x - y)$ ולכן $3|y + 2x$
טרנזיטיבי־ אם $3|x + 2y, 3|y + 2z$ אזי $x + 2y = 3n,\ y + 2z = 3m$ עבור n, m שלמים כלשהם ואז $x + 2z = 3m + 3n - 3y$ ולכן $3|x + 2z$

(ד) עבור קבוצה X לא ריקה . $\emptyset \subseteq X \times X$ - סימטרי, טרזטיבי, אנטי סימטרית כל הדברים מתקיימים באופן ריק מלבד רפלקסיביות למשל $X = \{1\}$ ולא מתקיים $(1,1) \in \emptyset$

(ה) R יחס על $P(X)$ המוגדר לכל $A, B \subseteq X$ R $(A,B) \in R \Leftrightarrow A \triangle B \subseteq A$ - רפלקסיבי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי
התנאי $A \triangle B \subseteq A$ שקול לכך ש $B \subseteq A$

(ו) עבור X קבוצה $aRb \Leftrightarrow a = b$ (R נקרא יחס הזהות, מסומן לעיתים כ I_X)- רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי, שקילות
סימטרי, אנטי־סימטרי טרנזיטיביות - הכל נובע מכך שאם aRb חייב להיות כי $a = b$

(ז) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$(יחס על זוגות ממשיים) המוגדר $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ - רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, שקילות
לא אנטי סימטרי- $(1,1)R(\sqrt{2},0)$ וגם $(\sqrt{2},0)R(1,1)$ אבל לא מתקיים $(1,1) = (\sqrt{2},0)$

3. כמה יחסי שקילות יש על X בהנתן שב X יש 4 איברים? - 15
כל יחס שקילות מתאים לחלוקה של X- כמה חלוקות יש ל־4 איברים?

	A_1	A_2	A_3	A_4
a	1	1	1	1
b	0	1	1	2
c	0	0	2	2
d	0	0	1	3
e	0	0	0	4

כמה אפשריות יש לכל חלוקה?

	option
a	1
b	6
c	3
d	4
e	1

4. נכון/לא נכון- אם R יחס סימטרי וטרנזיטיבי אז הוא רפלקסיבי- לא נכון
למשל $X = \{1,2,3\}$ $R = \{(2,1),(1,2),(1,1),(2,2)\}$

5. נגדיר יחס על $P(\mathbb{R})$לכל $A, B \subseteq \mathbb{R}$ R $(A,B) \in R \Leftrightarrow A \cap \{-\pi, 0, 3\} = B \cap \{-\pi, 0, 3\}$
בדוק שזהו יחס שקילות. כמה איברים יש בקבוצת המנה? 8
רפלקסיביות- לכל A מתקיים $A \cap \{-\pi,0,3\} = A \cap \{-\pi,0,3\}$
סימטריות וטרנזיטיביות נובע מסימטריות וטרנזיטיביות של יחס " = "
בקבוצת המנה יש 8 איברים $P(\mathbb{R})/R = \{[A]_R \mid A \in P(\{-\pi,0,3\})\}$ - כל האפשריות לחיתוך עם הקבוצה $\{-\pi,0,3\}$

6. נתונה הקבוצה A ואוסף תת־קבוצות שלה $A_1, A_2, \ldots A_n$ נגדיר יחס על A.
$xRy \Leftrightarrow \exists i : x \in A_i \wedge y \in A_i$ אלו מהמשפטים הבאים נכון

(א) $R \Leftarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$ רפלקסיבי - נכון
כל $a \in A$ שייך לאחת מהקבוצות A_k ולכן $(a,a) \in R$

(ב) $R \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$ רפלקסיבי - נכון
כל $a \in A$ מקיים $(a,a) \in R$ ולכן $a \in A_k$ עבור k מסוים ולכן מתקיים $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$

(ג) לכל $1 \le i < j \le n$ מתקיים $R \Leftarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ רפלקסיבי - לא נכון
למשל $A = \{1\}, A_1 = A_2 = R = \emptyset$

(ד) לכל $1 \le i < j \le n$ מתקיים $R \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ טרנזיטיבי - לא נכון
למשל $A = A_1 = A_2 = \{1\}$ $R = \{(1,1)\}$

(ה) לכל $1 \le i < j \le n$ מתקיים $R \Leftarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ טרנזיטיבי- נכון
נניח xRy, yRz אזי קיימים i,j כך ש $x,y \in A_i,\ y,z \in A_j$ ולכן $y \in A_i \cap A_j$
כיוון שהקבוצות זרות $A_i = A_j$ ולכן $x,y,z \in A_i$ ולכן xRz

7. נכון/לא נכון תהא $|X| = 2$ ו R יחס על X אזי R טרנזיטיבי- לא נכון
למשל $X = \{1,2\}$ $R = \{(1,2)(2,1)\}$

8. נכון/לא נכון . תהא X קבוצה ו R יחס רפלקסיבי וטרנטיבי עליה.
נגדיר יחס S על X- $aRb \wedge bRa \iff aSb$. אזי S יחס שקילות.
נכון:
טרנזיטיביות: $[aRb \wedge bRc] \wedge [bRa \wedge cRb] \Leftarrow [aRb \wedge bRa] \wedge [bRc \wedge cRb] \Leftarrow aSb,\ bSc$
$aSc \Leftarrow [aRc] \wedge [cRa] \Leftarrow$

9. עבור הפונקציה $f : A \to B$ האם היא חח"ע, על

(א) $A = \mathbb{N} \cup \{0\}, B = \mathbb{Z}$ ו $f(x) = |x|$- חח"ע, לא על

(ב) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}$ ו $f(x) = |x|$ - לא חח"ע , לא על

(ג) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$ ו $f((x,y)) = x$ - לא חח"ע, על

(ד) $A = B = P(X)$ עבור X קבוצה כלשהיא. ו $\forall Y \in P(X),\ f(Y) = X \backslash Y$-
חח"ע ועל

10. יהיו A, B קבוצות לא ריקות אילו מבין הבאים נכון

(א) קיימת פונקציה $f : A \to B$ - נכון
למשל נבחר $b \in B$ ונגדיר פונקציה $f = \{(a,b) \mid a \in A\}$

(ב) קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$ - לא נכון
למשל $A = \{1,2\},\ B = \{1\}$

(ג) קיימת פונקציה על $f : A \to B$ - לא נכון
למשל $A = \{1\},\ B = \{1,2\}$

(ד) קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to A \times B$ - נכון
נבחר $b \in B$ ונגדיר $\forall a \in A\ f(a) = (a,b)$

(ה) קיימת פונקציה על $f : A \to A \times A$ - לא נכון
למשל $A = \{1, 2\}$ בתחום יש 2 איברים ובטווח יש 4 ולכן בתמונה של הפונקציה יהיו 2 איברים בלבד.

(ו) אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$ אז קיימת פונקציה חח"ע $g : A \to A \times B$ - נכון
למשל $\forall a \in A \ g(a) = (a, f(a))$

(ז) אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$ אז קיימת פונקציה חח"ע $g : A \to B \times B$ - נכון
למשל $\forall a \in A \ g(a) = (f(a), f(a))$

11. יהיו A, B קבוצות בעלות מספר סופי של איברים אילו מבין הבאים נכון

(א) אם קיים יחס חח"ע $R \subseteq A \times B$ אז $|dom(R)| = |im(R)|$ - לא נכון
אם $A = B = \{1, 2\}$ ו- $R = \{(1, 1), (1, 2)\}$

(ב) אם קיים יחס שאינו חח"ע $R \subseteq A \times B$ אז $|dom(R| > |im(R)|$ - לא נכון
למשל $A = B = \{1, 2\}$ $f = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$

(ג) אם קיים יחס על $R \subseteq A \times B$ אז $|dom(R)| = |im(R)|$ - לא נכון
למשל $A = B = \{1, 2\}$ $f = \{(2, 1), (2, 2)\}$