מערכות משוואות לינאריות ודירוג מטריצות.

1) נתונה מערכת משוואות מעל השדה $\mathbb{Z}_5$.

$$x+y+az=2$$
$$-ax-2y+z=0$$
$$x+y+2z=a$$

עבור אילו ערכי a למערכת יש 5 פתרונות?

א) $a=0$.

ב) $a=1$

ג) $a=2$

ד) אין ערך a עבורו למערכת יש 5 פתרונות.

תשובה: ד

2) תהי A מטריצה כך שבצורה המדורגת שלה יש שורת אפסים. למערכת $Ax=0$ ...

א) יש רק פתרון אחד.

ב) אין שום פתרון.

ג) יש יותר מפתרון אחד.

ד) אין מספיק נתונים כדי לדעת בוודאות.

תשובה : ד

3) תהי A מטריצה מדורגת קנונית. נבצע על A את פעולת השורה $R_2=R_2-5R_3$ ונקבל את המטריצה B.
איזה מבין הטענות הבאות נכונה.

א) B מטריצה מדורגת קנונית.

ב) B מטריצה מדורגת אבל לא מדורגת קנונית.

ג) B מטריצה מדורגת. ייתכן שהיא מדורגת קנונית וייתכן שלא.

ד) B אינה מדורגת.

תשובה: ג

4) המטריצה $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ היא הצורה המדורגת קנונית של המטריצה

א) $\begin{pmatrix}2&4&6&8&10\\1&3&5&7&10\\3&7&11&15&21\end{pmatrix}$

ב) $\begin{pmatrix}4&10&16&20&31\\2&4&6&8&10\\1&3&5&6&10\end{pmatrix}$

ג) תשובות א,ב נכונות.

ד) תשובות א,ב לא נכונות.

תשובה: ב

מכפלת מטריצות ומטריצה הופכית

5) כמה מטריצות $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ מקיימות ש $A^2 = I$?

א) 2
ב) 4
ג) 10
ד) תשובות א,ב,ג לא נכונות.

תשובה: ד

6) נתונה מטריצה הפיכה $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$. הצלחנו להביא את A לצורה מדורגת קנונית על ידי ביצוע הפעולות הבאות (לפי הסדר שמופיע כאן):

- $R_2 = R_2 - 2R_1$
- $R_1 \leftrightarrow R_2$.
- $R_3 = 2R_3$.
- $R_3 = R_3 - 2R_2$.

איזה מהטענות הבאות נכונה?

א) $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$

ב) $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ג) $A = I \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ד) $A = I \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$

תשובה: א

7) תהי

$$A = \begin{pmatrix}1&-4&3\\1&-3&2\\1&-3&2\end{pmatrix}$$

איזה מהטענות הבאות נכונה?

א) $A^2 = 0$.
ב) $A^2 \neq 0$ ו $A^3 = 0$.
ג) $A^3 \neq 0$ ו $A^4 = 0$.
ד) טענות א,ב,ג לא נכונות.

תשובה: ב

מרחבים וקטוריים

8) יהי V מרחב וקטורי ממימד 5 ותהי $A \subseteq V$ קבוצה פורשת.
איזה מהטענות הבאות נכונה בוודאות?
א) אם נוסיף ל A איבר, היא כבר לא תהיה פורשת.
ב) אם נוריד מ A איבר, היא כבר לא תהיה פורשת.
ג) אם נוסיף ל A איבר היא תהיה תלויה לינארית.
ד) A קבוצה תלויה לינארית.

תשובה: ג.

9) יהי $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס למרחב וקטורי. נביט על הקבוצה $C = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3 - v_2\}$.
איזה מהטענות הבאות נכונה?
א) C תמיד פורשת ובת"ל ולכן היא בסיס.
ב) C תמיד פורשת אבל לא בהכרח בת"ל ולכן היא לא בהכרח בסיס.
ג) C תמיד בת"ל אבל לא בהכרח פורשת ולכן היא לא בהכרח בסיס.
ד) C לא בהכרח פורשת ולא בהכרח בת"ל ולכן היא לא בהכרח בסיס.

תשובה: א

10) תהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ קבוצה של וקטורים במרחב הוקטורי $\mathbb{F}^m$. אנחנו מחפשים קבוצה B בלתי תלויה לינארית שתקיים ש $span(B) = span(A)$. מה עלינו לעשות?
א) צריך לשים את וקטורי A בעמודות מטריצה, לדרג את המטריצה, ואז להכניס לקבוצה B את אותם וקטורים מ $v_i \in A$ כך שבעמודה ה i של המטריצה המדורגת יש איבר מוביל.
ב) צריך לשים את וקטורי A בשורות מטריצה, לדרג את המטריצה לקחת את B להיות כל השורות במטריצה המדורגת שהן לא שורת אפסים.
ג) צריך להרכיב מערכת משוואות לינארית $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$
למצוא עבורה פתרון לא טריוויאלי $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0,0,\dots,0)$ ולזרוק מהקבוצה A וקטור v_i שעבורו $\alpha_i \neq 0$.
אז נישאר עם הקבוצה $A' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \backslash \{v_i\}$.
נרכיב שוב מערכת משוואות עבור A' ושוב נזרוק וקטור כמו שתואר קודם.
נמשיך את התהליך עד שנקבל מערכת משוואות שאין לה פתרון לא טריוויאלי.
הוקטורים שישארו לנו בסוף התהליך יהיו הקבוצה B המבוקשת.
ד) שלושת השיטות א,ב,ג יפיקו את קבוצה B מתאימה.

תשובה: ד

11) יהי n מספר טבעי. יהי V מרחב וקטורי ממימד $10n$. יהיו W_1, W_2, W_3 תתי מרחבים כך ש

$$dimW_1 = dimW_2 = dimW_3 = n$$

ובנוסף ידוע כי $\dim(W_1 \cap W_3) = 1$.

מהן האפשרויות עבור $\dim(W_1 + W_2 + W_3)$?

א) כל מספר בתחום $\{2n-1, 2n, \dots, 10n\}$.
ב) כל מספר בתחום $\{2n-1, 2n, \dots, 3n\}$.
ג) כל מספר בתחום $\{2n-1, 2n, \dots, 3n-1\}$.
ד) תשובות א,ב,ג אינן נכונות.

תשובה: ג

12) נגדיר
$$V = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} | tr(A) = 0\}$$
מהו $dimV$?
א) $\frac{(n-1)n}{2}$.
ב) $n^2 - n$.
ג) $n^2 - 1$.
ד) V בכלל לא מרחב וקטורי.

תשובה: ג

<u>קוארדינטות ומטריצות מעבר בין בסיסים</u>

13) יהי V מרחב וקטורי ממימד 4. נניח ש U, W הם שני תתי מרחבים ממימד 2 כך ש $U \oplus W = V$.
יהיו $B = \{b_1, b_2\}$ ו $B' = \{b'_1, b'_2\}$ שני בסיסים עבור U.
יהיו $C = \{c_1, c_2\}$ ו $C' = \{c'_1, c'_2\}$ שני בסיסים עבור W.
בנוסף נגדיר $D = \{b_1, c_1, b_2, c_2\}$ ו $D' = \{b'_1, c'_1, b'_2, c'_2\}$ בסיסים עבור V.
רק אחת מארבע המטריצות שלפניך, עשויה להיות (עבור בחירה כלשהיא של B, B', C, C') המטריצה $[I]_{D'}^{D}$. מיהי?

א) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 7 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

ב) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ג) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

ד) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

תשובה: ב

14) תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ויהי S הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. כמה בסיסים C קיימים כך ש $[I]_C^S = A$?
א) אף לא אחד.
ב) אחד.
ג) אינסוף.

ד) תשובות א,ב,ג אינן נכונות.

תשובה: א

<u>מרחבי המטריצה</u>

15) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ותהי P הצורה המדורגת קנונית שלה. איזה מהטענות הבאות נכונות?
א) $R(A) = R(P)$ ו $C(A) = C(P)$
ב) $C(A) = C(P)$ אבל לא בהכרח מתקיים $R(A) = R(P)$.
ג) $R(A) = R(P)$ אבל לא בהכרח מתקיים $C(A) = C(P)$.
ד) לא בהכרח מתקיים $R(A) = R(P)$. לא בהכרח מתקיים $C(A) = C(P)$.

תשובה: ג

16) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה כך ש $rank(A) < n$. איזה מהטענות הבאות נכונה?
א) קיים מספר טבעי k כך ש $A^k = 0$.
ב) $rank(A^2) < rank(A)$.
ג) קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB = 0$.
ד) טענות א,ב,ג לא נכונות.

תשובה: ג

17) תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times 4}$ מטריצה ששורותיה בלתי תלויות לינארית. נתון כי הפתרון של מערכת המשוואות $Ax = b$ הוא $s\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\12\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\5\\-1\\-7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-2\\5\\1\end{pmatrix}$.
מהו m? (מספר השורות של A).
א) 2
ב) 3
ג) 4
ד) אין מספיק נתונים כדי לדעת בוודאות.

תשובה: א

<u>טרספורמציות לינאריות</u>

18) יהי V מרחב וקטורי ממימד 3 ותהי $T: V \longrightarrow V$ העתקה לינארית. קיים $v \in V$ כך ש הקבוצה $\{v, T(v), T^2(v)\}$ היא בסיס עבור V.
איזה מהטענות הבאות נכונה בוודאות.
א) T העתקה חד חד ערכית.
ב) T אינה חד חד ערכית.
ג) T מקיימת $T^4 = T$.
ד) טענות א,ב,ג לא נכונות.

תשובה: ד

19) יהי V מרחב וקטורי ממימד 4 ו W מרחב וקטורי ממימד 2 תהי $T: V \longrightarrow W$ העתקה לינארית שאינה העתקת האפס. מהן האפשרויות עבור $\dim(Ker(T))$?

א) $\dim\big(Ker(T)\big) = 2$.

ב) כל מספר בתחום $\{2,3\}$.

ג) כל מספר בתחום $\{1,2,3\}$.

ד) כל מספר בתחום $\{2,3,4\}$.

תשובה: ב

20) יהיו $\mathrm{V} = \mathbb{Z}_p^3$ ו $\mathrm{W} = \mathbb{Z}_p^5$ שני מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{Z}_p$. כמה העתקות לינארית $\mathrm{T}: \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ מקיימות ש

$$T(0,3,2) = (0,1,0,3,0) \quad T(0,2,3) = (1,1,-2,4,1) \quad \mathrm{T}(1,0,0) = (1,0,3,0,5)$$

א) אם $p = 2$ אין כאלה העתקות. אחרת יש בדיוק אחת.

ב) אם $p = 3$ יש אינסוף העתקות כאלה. אחרת יש בדיוק אחת.

ג) אם $p = 5$ אין כאלה העתקות. אחרת יש בדיוק אחת.

ד) אף אחת מהתשובת א,ב,ג לא נכונה.

תשובה: ג

21) יהי V מרחב וקטורי ממימד 3 ותהי $T: V \longrightarrow V$ ההעתקה הלינארית.

$$T(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$$

קיימים בסיסים B, C עבור V כך ש $[T]_C^B$ היא המטריצה

א) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

ב) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

ג) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

ד) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

תשובה: ב

<u>דטרמיננטות</u>

22) יהי $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס עבור המרחב הוקטורי V. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה.

נגדיר בסיס חדש $B' = \{v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}\}$ שמכיל את אותם איברי B אבל בסדר אחר.

מהי הדטרמיננטה של המטריצה $[I]_B^{B'}$?

א) $\left|[I]_B^{B'}\right| = sgn(\sigma)$.

ב) $\left|[I]_B^{B'}\right| = -sgn(\sigma)$.

ג) $\left|[I]_B^{B'}\right| = 0$.

ד) אין מספיק נתונים כדי לדעת בוודאות.

תשובה: א

23) תהי $A \in \mathbb{F}^{5\times5}$ מטריצה מדרגה 3. למה שווה $A \cdot Adj(A)$?

א) I

ב) 0

ג) אין מספיק נתונים כדי לדעת בוודאות.

ד) במקרה הזה, לא קיימת בכלל המטריצה $Adj(A)$.

תשובה: ב

24) תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ מטריצה שכל ערכיה שלמים ו $|A| = 7$. בנוסף יהי $b \in \mathbb{R}^3$ וקטור שכל ערכיו שלמים. נבנה מערכת משוואות $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$. איזה מהמספרים הבאים עשוי להיות (עבור בחירה מתאימה של A, b) הערך של x?

א) $\frac{1}{2}$

ב) $\frac{2}{3}$

ג) $\frac{5}{6}$

ד) אף אחד מבין א,ב,ג לא יכול להיות הערך של x.

תשובה: ד