האם הפונקציה הבאה דיפרנציאבלית בנקודה $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

פתרון: ראשית נבדוק אם קיימים f_x, f_y בנקודה $(0,0)$:

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^3}{t^2+0^2}}{t}\\&=1\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}f_y(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\frac{0^3}{0^2+t^2}}{t}\\&=0\end{aligned}$$

לכן המישור המשיק בנקודה $(0,0)$ הוא

$$\begin{aligned}z&=f_x(0,0)\,x+f_y(0,0)+C\\&=x+C\end{aligned}$$

נציב את הנקודה $(0,0,f(0,0))=(0,0,0)$ במישור לקבל

$$0=0+C$$

ולכן המישור הוא $z=x$.

כעת נבדוק האם f דיפרנציאבלית ב $(0,0)$. נבדוק האם הגבול

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^3}{h^2+k^2}-h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

קיים ושווה לאפס. נבחר מסלול $(h,k)=(t,t)$ כאשר $t\to 0^+$

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{h^3}{h^2+k^2}-h}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \frac{-hk^2}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= -\frac{t^3}{\left(t^2+t^2\right)\sqrt{\left(t^2+t^2\right)}} \\
&= \frac{t^3}{\left(2t^2\right)\sqrt{2t^2}} \\
&\overset{t\geq 0}{=} \frac{t^3}{2\sqrt{2}t^2\cdot t} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

ולכן הגבול לא שואף לאפס.