בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשפ"ב, מועד א' -פתרון

31.8.2022, ד' אלול התשפ"ב

מרצים: אחיה בר-און, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר
מתרגלים: שחר חנניה, כנה נהיר, גלעד פורת-קורן, עדו פלדמן, הדר קנר, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (21 נק') תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $A\subseteq B$ אז $A\triangle C\subseteq B\triangle C$.

פתרון: הפרכה: ניקח $A=\emptyset ,B=C=\{1\}$ אזי A מוכל ב B אבל $A\triangle C=C=\{1\}$ לא מוכל ב $B\triangle C=\emptyset$.

(ב) אם $A\in B$ אז $P(A)\in P(B)$.

פתרון: הפרכה: ניקח $A=\{1\}\,,B=\{A\}$ אזי $A\in B$ אבל $P(A)=\{\emptyset ,A\}$לא שייך ל $P(B)=\{\emptyset ,B\}$.

(ג) מתקיים $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

פתרון: הוכחה: בהכלה דו כיוונית:

($\subseteq$) יהא $x\in A\cap(B\backslash C)$ אזי $x\in A$ וגם $x\in B\backslash C$ לכן

$$(x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(x\notin C)$$

לכן

$$(x\in A\cap B)\wedge(x\notin A\cap C)$$

ולכן

$$x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$$

($\supseteq$) יהא

$$x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$$

לכן

$$(x\in A\cap B)\wedge(x\notin A\cap C)$$

לכן

$$(x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin C)$$

לכן לפי פילוג

$$[(x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(x\notin A)]\vee[(x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(x\notin C)]$$

שזה גורר

$$(x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(x\notin C)$$

לכן

$$(x\in A)\wedge(x\in B\backslash C)$$

לכן $x\in A\cap(B\backslash C)$.

2. (16 נק')

(א) לכל n טבעי נגדיר יחס T_n על $P\left(\{1,\ldots,n\}\right)$ כך

$$T_n=\{(A,B)\mid n\in A\cap B\}$$

הוכיחו כי $|T_n|=4^{n-1}$.

פתרון: יהא n נתון ונסמן $X=P\left\{1,\ldots,n-1\right\}$ (ובמקרה ש $n=1$ הסימון $\{1,\ldots,n-1\}$ הוא הקבוצה הריקה).

נוכיח ש $|T_n|=|X\times X|$ ואז נסיק כי

$$|T_n|=|X\times X|=|X|\cdot|X|=2^{n-1}\cdot 2^{n-1}=4^{n-1}$$

כפי שרוצים. נגדיר פונקציה

$$f : X \times X \to T_n$$

ע"י $f((C, D)) = (C \cup \{n\}, D \cup \{n\})$ ונראה שהיא חח"ע ועל (לפי הגדרתה רואים ש $f((C, D)) \in T_n$ שהרי n הוא איבר שנמצא בקבוצות $C \cup \{n\}, D \cup \{n\}$ ולכן גם בחיתוך שלהם).

- חח"ע: נניח $f((C_1, D_1)) = f((C_2, D_2))$ ונוכיח כי $(C_1, D_1) = (C_2, D_2)$. מכך ש $f((C_1, D_1)) = f((C_2, D_2))$ נסיק ש

$$(C_1 \cup \{n\}, D_1 \cup \{n\}) = (C_2 \cup \{n\}, D_2 \cup \{n\})$$

ולכן $C_1 \cup \{n\} = C_2 \cup \{n\}$ וגם $D_1 \cup \{n\} = D_2 \cup \{n\}$. כיוון ש $C_1, C_2 \in X$ אזי $n \notin C_1, C_2$ ולכן מהשיוון $C_1 \cup \{n\} = C_2 \cup \{n\}$ נסיק כי

$$C_1 = (C_1 \cup \{n\}) \setminus \{n\} = (C_2 \cup \{n\}) \setminus \{n\} = C_2$$

ובאופן דומה $D_1 = D_2$ ולכן $(C_1, D_1) = (C_2, D_2)$ כפי שרצינו.

- על: יהיו $(A, B) \in T_n$. נגדיר $C = A \setminus \{n\}, D = B \setminus \{n\}$ אזי $C, D \in X$ ומתקיים

$$f((C, D)) = (C \cup \{n\}, D \cup \{n\}) = (A, B)$$

מכאן ש $|X \times X| = |T_n|$.

(ב) לכל n טבעי נגדיר יחס S_n על $P(\{1, \ldots, n\})$ כך

$$S_n = \{(A, B) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$$

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי $|S_n| = 4^n - 3^n$.

פתרון: נוכיח באינדוקציה.

- בסיס $n = 1$: נקבל ש S_1 היא הקבוצה שיש בה איבר אחד שהוא $(\{1\}, \{1\})$. ולכן $|S_1| = 1 = 4^1 - 3^1$.
- צעד: נניח נכונות עבור n טבעי מסוים ונוכיח נכונות עבור $n + 1$: לפי הנחת האינדוקציה $|S_n| = 4^n - 3^n$ ורוצים להראות כי $|S_{n+1}| = 4^{n+1} - 3^{n+1}$. נציג את S_{n+1} כאיחוד של 4 קבוצות זרות. כל זוג $(A, B) \in S_{n+1}$ מקיים בדיוק אחד מהבאים:
  - קטגוריה 1: $n + 1 \in A$ וגם $n + 1 \in B$
  - קטגוריה 2: $n + 1 \notin A$ וגם $n + 1 \in B$
  - קטגוריה 3: $n + 1 \in A$ וגם $n + 1 \notin B$
  - קטגוריה 4: $n + 1 \notin A$ וגם $n + 1 \notin B$

נסמן ב X_1, X_2, X_3, X_4 את הקבוצות של כל הזוגות (A, B) מקטגוריה $1, 2, 3, 4$ בהתאמה. קל לראות ש $X_1 = T_{n+1}$ וגם $X_4 = S_n$. בנוסף

$$X_2 = \{(C, D \cup \{n + 1\}) \mid (C, D) \in S_n\}$$

והפונקציה $f : S_n \to X_2$ המוגדרת $f((C, D)) = (C, D \cup \{n + 1\})$ היא חח"ע ועל. לכן $|X_2| = |S_n|$. באופן דומה

$$X_3 = \{(C \cup \{n + 1\}, D) \mid (C, D) \in S_n\}$$

ו $|X_3| = |S_n|$. סה"כ קיבלנו

$$|S_{n+1}| = |X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| = |T_{n+1}| + 3 \cdot |S_n| = 4^n + 3 \cdot (4^n - 3^n) = 4 \cdot 4^n - 3 \cdot 3^n = 4^{n+1} - 3^{n-1}$$

כאשר השיוויון האדום מתבסס על הנחת האינדוקציה והסעיף הקודם.

3. (21 נק') נסמן $X = P(\mathbb{R})\setminus\{\emptyset\}$. נגדיר על $X^{\mathbb{N}}$ את היחס

$$fRg \iff \forall n : f(n) \subseteq g(n)$$

(א) הוכיחו ש R הוא יחס סדר על $X^{\mathbb{N}}$.

פתרון: נוכיח ש R רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי:

- רפלקסיבי: לכל $f \in X^{\mathbb{N}}$ מתקיים כי $f(n) = f(n)$ לכל n ולכן בפרט $f(n) \subseteq f(n)$ לכל n ולכן fRf.
- אנטי סימטריות: נניח $f, g \in X^{\mathbb{N}}$ מקיימים fRg וגם gRf ונוכיח כי $f = g$. ל f, g אותו תחום ואותו טווח ונשאר להראות כי לכל n מתקיים $f(n) = g(n)$. לפי הנתון fRg נסיק כי לכל n מתקיים $f(n) \subseteq g(n)$ ומהנתון gRf נסיק כי לכל n מתקיים $g(n) \subseteq f(n)$ ומכך שלכל n מתקיים $f(n) \subseteq g(n)$ וגם $g(n) \subseteq f(n)$ נסיק שלכל n מתקיים $f(n) = g(n)$ כפי שרצינו (הכלה דו-כיוונית של קבוצות גוררת שיוויון בינהן).
- טרנזיביות: נניח $f, g, h \in X^{\mathbb{N}}$ מקיימים fRg וגם gRh ונוכיח כי fRh. לפי הנתון fRg נסיק כי לכל n מתקיים $f(n) \subseteq g(n)$ ומהנתון gRh נסיק כי לכל n מתקיים $g(n) \subseteq h(n)$ ומכך שלכל n מתקיים $f(n) \subseteq g(n)$ וגם $g(n) \subseteq h(n)$ נסיק שלכל n מתקיים $f(n) \subseteq h(n)$ (טרנזיטיביות של הכלה קבוצות). מכאן לפי הגדרה, fRh כפי שרצינו.

(ב) מצאו את עוצמת קבוצת האיברים המקסימאליים ב $X^{\mathbb{N}}$ ביחס ל R. קבעו אם העוצמה סופית (אם כן, מה גודל הקבוצה), $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת. נמקו תשובתכם.

פתרון: נוכיח שיש איבר גדול ביותר שהוא $g : \mathbb{N} \to X$ המוגדר $g(n) = \mathbb{R}$ (לכל n) ולכן הוא איבר מקסמאלי היחיד ולכן התשובה לסעיף זה היא 1. אכן, לכל $f \in X^{\mathbb{N}}$ מתקיים כי $f(n) \in X$ לכל n ולכן

$$f(n) \subseteq \mathbb{R}$$

לכל n. בפרט, $f(n) \subseteq g(n)$ לכל n ולכן fRg.

(ג) מצאו את עוצמת קבוצת האיברים המינימאליים ב $X^{\mathbb{N}}$ ביחס ל R. קבעו אם העוצמה סופית (אם כן, מה גודל הקבוצה), $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת. נמקו תשובתכם.

פתרון: נוכיח שקבוצת האיברים המינימאליים היא קבוצת הפונקציות מהטבעיים לנקודונים הממשיים. נגדיר

$$Y = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

ונראה שקבוצת האיברים המינימאליים היא $Y^{\mathbb{N}}$. תהא $g \in Y^{\mathbb{N}}$ ונראה ש g איבר מיני'. נניח כי fRg ונוכיח ש $f = g$. מכך ש fRg נסיק שלכל n מתקיים $f(n) \subseteq g(n)$. כיוון ש $g(n)$ הוא נקודון אזי הקבוצות שמוכלות בו הן $g(n)$ ו $\emptyset$. כיוון ש $f(n) \neq \emptyset$ (לפי הגדרת X) נסיק ש $f(n) = g(n)$ לכל n ולכן $f = g$ (ליתר דיוק, נרחיב את הטווח של g להיות X).

מצד שני, נניח $g \in X^{\mathbb{N}}$ איבר מינימאלי ונראה ש $g(n)$ הוא נקודון לכל n. נב"ש שקיים m כך ש $g(m)$ אינו נקודון. לפי הגדרת X, $g(m)$ אינה ריקה ולכן קיים $a \in g(m)$. כיוון ש $g(m)$ אינו נקודון נקבל ש $\{a\} \subsetneq g(m)$. מכאן שעבור הפונקציה $f : \mathbb{N} \to X$ המוגדרת

$$f(n) = \begin{cases} g(n) & n \neq m \\ \{a\} & n = m \end{cases}$$

נקבל ש $f \neq g$ וגם fRg (כיוון שלכל n מתקיים $f(n) \subseteq g(n)$). קיבלנו סתירה למינימאליות של g.

לכן התשובה לסעיף זה היא

$$\left|Y^{\mathbb{N}}\right| = \aleph^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

4. (28 נק') נגדיר

$$X = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \le \aleph_0\}$$

להיות כל תתי הקבוצות בנות המנייה של $\mathbb{R}$. נתבונן בקס"ח $(X, \subseteq)$.

(א) הוכיחו שבקס"ח זה אין איברים מקסימאליים.

פתרון: נב"ש שקיים $C \in X$ שהיא איבר מקסימאלי. לפי הגדרת X נקבל ש $|C| \le \aleph_0$ ולכן בפרט $C \neq \mathbb{R}$ (שהרי $|\mathbb{R}| = \aleph > \aleph_0$) ולכן קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש $x \notin C$. נגדיר

$$\hat{C} = C \cup \{x\}$$

אזי

$$\left|\hat{C}\right| = |C| + |\{x\}| \le \aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

ולכן $\hat{C} \in X$ ומכילה ממש את C (כיוון ש $x \notin C$) בסתירה למקסימאליות של C.

(ב) הוכיחו שקיימת קבוצה של קבוצות $S \subseteq X$ כך שהקבוצה $\cup_{B \in S} B$ אינה שייכת ל X.

פתרון: נסתכל על קבוצת כל הנקודונים

$$S = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

ונקבל שהאיחוד $\cup_{B \in S} B = \mathbb{R}$ שמעוצמה $\aleph$ שגדולה ממש מ $\aleph_0$ ולכן לא שייכת ל X.

(ג) הוכיחו שקיימת קבוצה של קבוצות $S \subseteq X$ שהיא **שרשרת** כך שהקבוצה $\cup_{B \in S} B$ אינה שייכת ל X.

פתרון: לפי עקרון המקסימום של האוסדורף, קיימת $S \subseteq X$ שרשרת מקסימאלית (ביחס להכלה). טענה: $\cup_{B \in S} B$ אינה שייכת ל X. הוכחה: נב"ש ש $\cup_{B \in S} B$ שייכת ל X. נסמן את הקבוצה ב C. אזי C איבר מקסמאלית ב $(X, \subseteq)$ בסתירה לסעיף א. למה C איבר מקסימאלי? כי אם היה $\hat{C} \in X$ המקיים $C \subsetneqq \hat{C}$ נקבל ש $S \cup \left\{\hat{C}\right\}$ שרשרת שמכילה ממש את S בסתירה למקסימאליות של S (ניקח שני קבוצות ב $S \cup \left\{\hat{C}\right\}$, אם שתיהן ב S אזי אחת מהם מוכל בשניה כיוון ש S שרשרת. אחרת, אחת מהן שווה ל $\hat{C}$ והיא מכילה שווה לקבוצה השניה).

(ד) תהא $S \subseteq X$ שרשרת מקסימאלית ביחס להכלה. הוכיחו $|S| > \aleph_0$.

פתרון: נב"ש $|S| \le \aleph_0$ אזי $\cup_{B \in S} B$ הוא איחוד בן מנייה של בנות מנייה ולכן לפי משפט גם בן מנייה. כמו שראינו בסעיף קודם, איחוד זה הוא איבר מקסמאלי ב $(X, \subseteq)$ בסתירה לסעיף א.

5. (24 נק') תהיינה A, B קבוצות לא ריקות. לכל פונקציה $f : A \to B$, נגדיר יחס R_f על $P(B)$ כך

$$R_f = \left\{(B_1, B_2) \mid f^{-1}[B_1] = f^{-1}[B_2]\right\}$$

זהו יחס שקילות, אין צורך להוכיח.

(א) יהא $b_0 \in B$ ונגדיר את הפונקציה הקבועה על b_0 להיות הפונקציה $f : A \to B$ המוגדרת על ידי הכלל $f(x) = b_0$.
מצאו את עוצמת קבוצת המנה, כלומר את $|{}^{P(B)}/_{R_f}|$.

פתרון: טענה: קבוצת המנה שווה ל $^{P(B)}/_{R_f} = \{[\{b_1\}], [\emptyset]\}$ ויש בה שני איברים (לאורך הפתרון נשתמש ב $[C]$ במקום ב $[C]_{R_f}$ להיות מחלקת השקילות של C) .

הוכחה: תהא $C \subseteq B$. אם $b_0 \in C$ אזי $f^{-1}[\{b_0\}] = A = f^{-1}[C]$ ולכן $(C, \{b_0\}) \in R_f$. אחרת $b_0 \notin C$ ואז $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset = f^{-1}[C]$ ולכן $(C, \emptyset) \in R_f$. קיבלנו שכל $C \subseteq B$ שקולה ל $\{b_1\}$ או ל $\emptyset$ ולכן

$$[C] = [\{b_1\}] \text{ או } [C] = [\emptyset]$$

ולכן $[C] \in \{[\{b_1\}], [\emptyset]\}$. קיבלנו ש $P(B)/R_f \subseteq \{[\{b_1\}], [\emptyset]\}$ וההכלה השניה ברורה.
נותר להוכיח ש $[\{b_1\}] \neq [\emptyset]$ ובכך נסיק שקבוצת המנה בת שני איברים בדיוק. אכן $f^{-1}[\{b_0\}] = A \neq \emptyset = f^{-1}[\emptyset]$ ולכן $\emptyset, \{b_1\}$ לא שקולים אחד לשני ולכן $[\{b_1\}] \neq [\emptyset]$.

(ב) נסמן את קבוצת כל יחסי השקילות על $P(B)$ ב X ונגדיר פונקציה $g : B^A \to X$ על ידי הכלל $g(f) = R_f$.
הוכיחו/הפריכו: g פונקציה חח"ע.
פתרון: טענה: עבור $f : A \to B$ על מתקיים כי

$$R_f = \{(C, C) \mid C \subseteq B\}$$

כלומר $R_f = I_{P(B)}$. הוכחה: כיוון ש R_f יחס שקילות אזי הוא בפרט רפקלסיבי ולכן לכל $C \subseteq B$ מתקיים $(C, C) \in R_f$.
נראה שאלו הזוגות היחידים. נניח $(C_1, C_2) \in R_f$ ונראה ש $C_1 = C_2$. מהגדרת R_f נקבל ש

$$f^{-1}[C_1] = f^{-1}[C_2]$$

ולכן נוכל להסתכל על התמונה $f[]$ של שני האגפים לקבל

$$f\left[f^{-1}[C_1]\right] = f\left[f^{-1}[C_2]\right]$$

ומכיוון ש f על מתקיים ש

$$C_1 = f\left[f^{-1}[C_1]\right] = f\left[f^{-1}[C_2]\right] = C_2$$

כפי שרצינו להוכיח. כעת נוכל להסתכל על $A = B = \mathbb{Z}$ ועל הפונקציות $f_1(x) = x$ ו $f_2(x) = x - 1$. גם f_2 וגם f_1 פונקציות על ולכן

$$g(f_1) = g(f_2) = \{(C, C) \mid C \subseteq \mathbb{Z}\}$$

אבל $f_1 \neq f_2$ ולכן g אינה חח"ע.