פיתרון תרגיל בית 12 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

5 ביולי 2016

1. יהי G גרף לא מכוון. הוכיחו שאם לכל קודקוד בגרף דרגה 2 או יותר, אז יש מעגל בגרף.

פיתרון בגרף $G = (V, E)$ יש בהכרח יותר משני קודקודים, שכן אחרת לא היה לכל קודקוד לפחות שני שכנים. לפי משפט לחיצת הידיים מתקיים

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|$$

ולכן מספר הצלעות גדול או שווה למספר הקודקודים בגרף. לפי משפט מן התרגול, בגרף כזה בהכרח יש מעגל (תזכורת: בעצים בני n קודקודים יש $n-1$ צלעות).

2. בנו גרף לא מכוון שבו דרגות כל הקודקודים גדולות מ-10 ויש בו קודקוד שאינו נמצא על אף מעגל.

פיתרון אפשרות אחת היא לבנות גרף כוכב $K_{1,11}$ שבו "נצמיח" גרף מלא K_{12} מכל זרוע בכוכב.
ביתר פירוט: נניח שישנו גרף כוכב עם מרכז שנסמן 0, ולו אחד עשרה שכנים שנסמנם $\{1, 2, \ldots, 11\}$. כעת נוסיף לכל אחד מן הקודקודים $\{1, 2, \ldots, 11\}$ אחד עשרה שכנים חדשים, ונחבר את כל הקשתות בין השכנים החדשים (בנפרד לכל קודקוד). ברור שלקודקוד 0 יש דרגה גדולה מ-10. שאר הקודקודים שייכים לתת-גרף שהוא גרף מלא, שבו לכל הקודקודים דרגה 11. נשים לב שהקודקוד במרכז לא שייך לאף מעגל. הרי כדי לסגור מעגל חייבים להשאר בתוך אחד מתת-הגרפים המלאים, והקודקוד במרכז לא נמצא שם.

3. הוכיחו שגרף לא מכוון G הוא קשיר אם ורק אם לכל זוג קודקודים u, v יש מסלול פשוט בין u לבין v.

פיתרון הכיוון של "רק אם", $(\Rightarrow)$ הוא ברור. הרי כל מסלול פשוט הוא בפרט מסלול.
בכיוון השני, מפני ש-G קשיר, אז יש מסלול בין כל זוג קודקודים. מה שעשוי למנוע ממסלול בין קודקודים u, v להיות פשוט הוא חזרה יותר מפעם אחת על קודקודים מסויימים. בהכרח דרך הקודקודים שבהם מבקרים יותר מפעם אחת, ישנו מעגל במסלול. אפשר להוריד אותו, ולבדוק האם הוא סופי. מפני שהמסלול הוא סופי, תמיד התהליך של הורדת מעגלים מהמסלול יעצר, ונקבל מסלול פשוט בין u לבין v.

4. כיצד נראה הגרף המשלים של הגרף הדו־צדדי השלם $K_{s,t}$? (ראו הגדרה 5.2.12 בספר).

פיתרון בגרף דו־צדדי $K_{s,t}$ יש שתי קבוצות של קודקודים. באחת יש s קודקודים שאינם מחוברים בינהם, ובשנייה יש t קודקודים שאינם מחוברים בינהם. שאר הקשתות, בין קודקודים מקבוצות שונות נמצאות בגרף. לכן בגרף המשלים נקבל איחוד זר של שני גרפים מלאים, האחד איזומורפי ל־K_s (המגיע מהקודקודים בקבוצה הראשונה) והשני איזומורפי ל־K_t (המגיע מהקודקודים בקבוצה השנייה).

5. גדיר באופן רקורסיבי מחלקה F של גרפים לא מכוונים. הבסיס: הגרף הכולל קודקוד בודד שייך למחלקה F.
הכלל הרקורסיבי: יהיו G גרף במחלקה F, x קודקוד ב־G ו־y קודקוד חדש שאיננו שייך לקודקודי G. נבנה גרף חדש על ידי הוספת הקודקוד y והצלע (x, y) ל־G. אז גם הגרף החדש שייך למחלקה F.
אילו גרפים נמצאים במחלקה F? הוכיחו תשובתכם.

פיתרון המחלקה F היא המחלקה של העצים. בהינתן עץ T, וקודקוד x בגרף, אם נוסיף ל־T קודקוד חדש y ואת הקשת (x, y) נקבל עץ. הרי הגרף נשאר קשיר, ולא סגרנו מעגל (y הוא עלה בעץ החדש). כל עץ בן n קודקודים ניתן לקבל על ידי הוספה של $n-1$ קשתות כמו בכלל הרקוסיבי, אחרי שמתחילים עם קודקוד בודד.

6. יהי n מספר טבעי. יהי גרף G עם 2^n קודקודים שמתאימים לתת־קבוצות של $\{1, \ldots, n\}$. שני קודקודים הם שכנים אם בחיתוך של תת־הקבוצות המתאימות להם יש בדיוק שני איברים.
מה מספר הקודקודים עם דרגה 0 בגרף G? מה הוא מספר רכיבי הקשירות של G?

פיתרון קודקוד בגרף הוא תת־קבוצה. יהי v קודקוד. אם ב־v (כתת־קבוצה!) יש שני איברים לפחות, אז ישנן תת־קבוצות של $\{1, \ldots, n\}$ שבחיתוך שלהן עם v יש בדיוק שני איברים (ודאו! מה קורה אם ב־v יש בדיוק שני איברים? מי הם השכנים שלו אז?), ולכן ל־v דרגה שאינה אפסית. נקבל שהקודקודים המבודדים הם הקודקודים שמקבילים ל־$\varnothing$ ול־$\{i\}$ עבור $1 \leq i \leq n$, שלהן פחות משני איברים. כלומר יש $n+1$ קודקודים עם דרגה 0.
מהתשובה למספר הקודקודים עם דרגה 0, נובע כי ישנם $n+2$ רכיבי קשירות. יש $n+1$ רכיבים עבור הקודקודים המבודדים, ושאר הקודקודים נמצאים ברכיב קשירות אחד (הסבירו איזה מסלול פשוט בין זוג קודקודים אפשר למצוא ברכיב קשירות זה).

7. יהי גרף G מסדר n עם k רכיבי קשירות. נבנה גרף חדש שבו אנו מוציאים קודקוד x מהגרף G יחד עם כל הקשתות שחלות ב־x.
מה הוא המספר המינימלי האפשרי והמספר המקסימלי האפשרי של רכיבי קשירות בגרף החדש? הוכיחו תשובתכם ומצאו דוגמאות לחסמים שמצאתם.

פיתרון עבור המספר המינימלי, אם x הוא קודקוד מבודד, אז הוצאתו רק תוריד רכיב קשירות אחד, וניוותר עם $k-1$ רכיבי קשירות.
עבור המספר המקסימלי האפשרי, אם G הוא גרף כוכב, הוצאת המרכז תשאיר $n-1$ רכיבי קשירות.