מערך תרגיל קורס 83-118 סמסטר ב' תשע"ה
מתמטיקה בדידה 2 להנדסת מחשבים

מאי 2015, גרסה 0.9

מבוא

נתחיל עם כמה דגשים:

- דף הקורס נמצא באתר www.math-wiki.com.
- שאלות בנוגע לחומר הלימודי מומלץ לשאול בדף השיחה באתר של הקורס.
- נכון לעכשיו אין הגשת תרגילים, אבל מתוכננים בחנים שיתבססו על התרגילים.
- נשמח לכל הערה על מסמך זה.

1 אינדוקציה

אנו ננסה לכסות בשני התירגולים הראשונים את [1, פרק 3]. בקיצור, אינדוקציה היא הסקה מן הפרט אל הכלל. תהליך ההסקה ההפוך, מן הכלל אל הפרט, נקרא דדוקציה. כאשר אנו נאמר אינדוקציה בקורס תמיד נתכוון לאינדוקציה מתמטית. עקרון האינדוקציה המתמטית הוא חיוני להוכחות מתמטיות רבות.

צורת רישום. קבוצת המספרים הטבעיים תסומן $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. לעיתים נוסיף גם את 0 לטבעיים ונסמן $\mathbb{N}_0$.

אקסיומה 1.1 (האקסיומה של האינדוקציה המתמטית [1, 3.1])**.** תהי A קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים. אז יש ב-A איבר מינימלי, כלומר, קיים $a \in A$ כך שלכל $b \in A$ מתקיים $b \geq a$.

משפט 1.2 (עקרון האינדוקציה המתמטית [1, 3.1.2])**.** תהי $R(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n \in \mathbb{N}$. אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **בסיס האינדוקציה:** הטענה $R(0)$ נכונה. (אצלנו, הטענה $R(1)$ נכונה.)

2. **שלב האינדוקציה:** לכל $n > 0$ (אצלנו $n > 1$), נכונות הטענה $R(n-1)$ גוררת את נכונות הטענה $R(n)$.

אז $R(n)$ תקפה לכל מספר טבעי n.

שאלה 1.3. הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי 3 מחלק את $4^n - 1$ לכל מספר טבעי n.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.
בסיס האינדוקציה: $n = 0$. אכן $4^0 - 1 = 0$ מחלק את 3. אפשר גם לבדוק עבור $n = 1$.
שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל $n-1 \geq 0$, כלומר 3 מחלק את $4^{n-1}-1$. נוכיח שהטענה נכונה גם ל-n. נשים לב כי

$$4^n - 1 = 4 \cdot 4^{n-1} - 1 = 4\left(4^{n-1} - 1\right) + \left(4^1 - 1\right)$$

וזהו סכום של שני מספרים ש-3 מחלק אותם לפי הנחת האינדוקציה. לכן לפי עקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל $n \geq 0$. $\square$

נסביר כי אינדוקציה לא חייבת להתחיל במקרה $n = 1$.

שאלה 1.4 ([1, 3.1.7]). הוכיחו כי לכל מספר טבעי $n \geq 5$ מתקיים $n^2 < 2^n$.

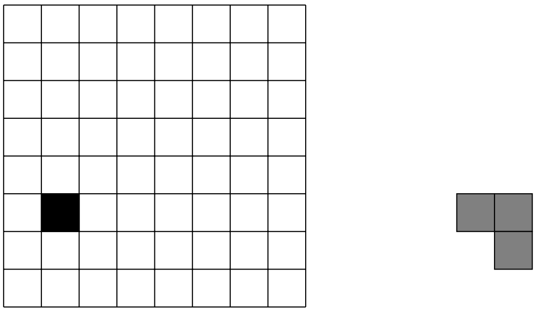
הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.
בסיס האינדוקציה: $n = 5$. אכן $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.
שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל $n - 1 \geq 5$, כלומר $(n-1)^2 < 2^{n-1}$.
נוכיח שהטענה נכונה גם ל-n. נכפיל את הנחת האינדוקציה ב-2 ונקבל $2(n-1)^2 < 2^n$.
נראה מיד כי $n^2 \leq 2(n-1)^2$ לכל $n \geq 5$ ובשילוב אי־השיוויון לעיל נקבל

$$n^2 \leq 2(n-1)^2 < 2^n$$

כנדרש. נשאר להראות כי $n^2 \leq 2(n-1)^2$ לכל $n \geq 5$, שלאחר העברת אגפים צריך להוכיח $n^2 - 4n + 2 \geq 0$. אך הביטוי $n^2 - 4n + 2$ חיובי לכל מספר טבעי המקיים $n \geq 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$. $\square$

הערה. אפשר להוסיף הסבר על גידול של פונקציות.

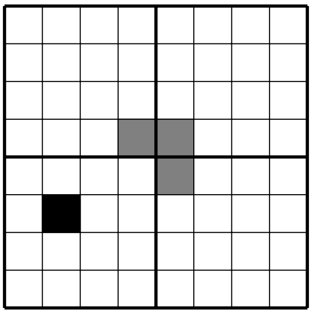
שאלה 1.5 ([1, 3.1.5]). נתון לוח בגודל $m \times m$ שהשחירו בו משבצת אחת (ראו ציור). הוכיחו כי ניתן לרצף את הלוח עם מרצפות בצורת האות ר׳ (לוח בגודל 2×2 שהוציאו ממנו משבצת, כולל סיבובים) כאשר m הוא חזקה של 2.



פתרון. מכיוון שנתון כי m הוא חזקה של 2, אפשר להניח כי $m = 2^n$ עבור n כלשהו.

בסיס האינדוקציה: $n = 0$. במקרה זה $m = 1$, והלוח הוא בגודל 1×1, כלומר משבצת אחת. המשבצת היחידה היא מושחרת, ולכן הלוח כולו מכוסה.

שלב האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה עבור $n - 1 \geq 0$ ונוכיח ל-n. נחלק את הלוח בגודל $2^n \times 2^n$ לארבעה לוחות בגודל $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ (ראו ציור). באחד מארבעת הלוחות נמצאת המשבצת המושחרת. נוסיף מרצפת ׳י׳ כך שתכסה את שלושת הלוחות האחרים (בערך במרכז הלוח הראשי). כעת קיבלנו ארבעה לוחות בגודל $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ שחסרה בהם משבצת, ולפי הנחת האינדוקציה ניתן לרצף כל אחד מהם, ולכן גם את הלוח הראשי.



מסקנה 1.6. כעת אפשר לראות כי 3 מחלק את $4^n - 1$ לכל מספר טבעי n בשיטה אחרת. הלוח מהשאלה הקודמת כולל $2^n \cdot 2^n - 1$ משבצות לא מושחרות, ואנו מכסים אותו בעזרת מרצפות שגודל כל אחת מהן הוא 3 משבצות.

משפט 1.7 (עקרון האינדוקציה המתמטית המלאה [1, 3.1.9])**.** תהי $R(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n \in \mathbb{N}$. אם קיים מספר $a \in \mathbb{N}$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **בסיס האינדוקציה:** הטענה $R(a)$ נכונה.
2. **שלב האינדוקציה:** לכל $n > a$, נכונות הטענה $R(k)$ לכל $a \leq k \leq n - 1$ גוררת את נכונות הטענה $R(n)$.

אז הטענה $R(n)$ תקפה לכל מספר טבעי $a \geq n$.

הגדרה 1.8. מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ נקרא ראשוני אם יש לו בדיוק שני מחלקים טבעיים. כלומר $n > 1$ ומתחלק רק ב-1 ובעצמו.

משפט 1.9 ([1, 3.1.11])**.** כל מספר טבעי $n > 1$ ניתן לרשום כמכפלה של מספרים ראשוניים. מכפלה כזאת נקראת פירוק של n לגורמים ראשוניים.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: $n = 2$. מכיוון ש-2 הוא ראשוני, הטענה נכונה עבורו.

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל המספרים $2, 3, \ldots, n-1$ ונוכיח שהיא נכונה עבור n. אם המספר n ראשוני, הטענה תקפה וסיימנו. אחרת, קיימים שני מספרים טבעיים $s, t \in \mathbb{N}$ כך ש-$n = st$ וגם $1 < s, t < n$. לפי הנחת האינדוקציה לכל אחד מן המספרים s ו-t ישנו פירוק לגורמים ראשוניים, ולכן גם ל-n ישנו פירוק לגורמים ראשוניים, שהוא המכפלה של הפירוקים של s ושל t. שימו לב שכאן לא הסתפקנו בהנחת האינדוקציה בעבור $n-1$, אלא השתמשנו בהנחת האינדוקציה בעבור מספרים כלשהם שקטנים מ-n. $\square$

משפט 1.10 (אפשר לדלג, [1, 3.1.12])**.** יש אינסוף מספרים ראשוניים.

הגדרה 1.11. נאמר שקבוצה סדורה חלקית (קס"ח) $(A, \leq)$ מקיימת את תנאי המינימליות אם בכל תת־קבוצה לא ריקה $B \subseteq A$ יש לפחות איבר מינימלי אחד ב-B.

משפט 1.12 (אפשר לדלג, העקרון המלא של האינדוקציה [1, 3.2.3])**.** תהי $(S, \leq)$ קס"ח המקיימת את תנאי המינימליות, ותהי $P(s)$ טענה כלשהי לגבי איבר $s \in S$. אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. הטענה $P(s)$ תקפה לכל איבר מינימלי s של S.
2. לכל $s \in S$, נכונות הטענה $P(t)$ לכל האיברים $t \in S$ כך ש-$t \leq s$ וגם $s \neq t$, גוררת את נכונות הטענה $P(s)$.

אז הטענה $P(s)$ תקפה לכל $s \in S$.

שאלה 1.13. תהי A קבוצה סופית מעוצמה $n = |A|$. אז מספר תת־הקבוצות של A הוא $|P(A)| = 2^n$.

פתרון. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: $n = 0$. במקרה זה הקבוצה A ריקה, ולכן $P(A) = \{\varnothing\}$. אכן $|P(A)| = 1 = 2^0$.

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל קבוצה בת $n - 1 \geq 0$ איברים, ונוכיח את נכונותה לקבוצות בנות n איברים. תהי A קבוצה כלשהי בת n איברים, ונניח ששמות האיברים הם $A = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$. נבחן שני סוגים של תת־קבוצות של A:

1. תת־קבוצות שלא כוללות את n כאיבר. אלו הן פשוט תת־קבוצות של הקבוצה $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, ומספרן לפי הנחת האינדוקציה הוא 2^{n-1}.

2. תת־קבוצות שכוללות את n כאיבר. נטען שמספרן של תת־קבוצות מסוג זה גם הוא 2^{n-1}, מפני שישנה פונקציה חח"ע ועל בין תת־קבוצות אלו לתת־קבוצות של $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. ההתאמה היא על ידי השמטת האיבר n מן תת־הקבוצה, וקבלת תת־קבוצה של $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

בסך הכל קיבלנו שישנן $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ תת־קבוצות של A, כנדרש. לכן לפי עקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל $n \geq 0$.

2 רקורסיה

רקורסיה היא שיטה שבה ניתן לחשב ערך של פונקציה על ידי שימוש בערך של הפונקציה עבור ערכים "קטנים" יותר.

הגדרה 2.1. הגדרה רקורסיבית (לעיתים מכונה הגדרה אינדוקטיבית) של קבוצה כוללת שני חלקים: הבסיס, שהוא הצהרה כי איברים מסויימים שייכים לקבוצה מוגדרת, והכלל הרקורסיבי, שהוא שימוש באיברים שכבר ידוע שהם בקבוצה כדי להגדיר עוד איברים ששייכים אליה.

שאלה 2.2. הגדר באופן רקורסיבי את $A = 2\mathbb{Z}$, הקבוצה של כל השלמים הזוגיים.

פתרון. הבסיס הוא $0 \in A$. הכלל הרקורסיבי הוא שאם $n \in A$, אז גם $n-2, n+2 \in A$.

שאלה 2.3. הגדר באופן רקורסיבי את הפונקציה $f(n) = n!$ עבור $n \in \mathbb{N}_0$.

פתרון. ערך ההתחלה הוא $f(0) = 1$. הכלל הרקורסיבי הוא $f(n) = nf(n-1)$ לכל $n > 0$.

דוגמה 2.4. נגדיר בצורה רקורסיבית את הקבוצה $U \subseteq \mathbb{N}$ הנקראת קבוצת אולם (Ulam), או קבוצת קולץ (Collatz).

הבסיס הוא $1 \in U$. הכלל הרקורסיבי הוא בן שני תנאים:

1. אם $x \in U$, אז $2x \in U$.

2. אם $y \in U$ מקיים $y \equiv 1 \pmod 3$, אז גם $\frac{y-1}{3} \in U$.

ישנה בעיה פתוחה במתמטיקה השואלת האם $U = \mathbb{N}$? הראו כי $\{1, \ldots, 10\} \subset U$, נסו לא להוכיח זאת עבור כל מספר בנפרד.

שאלה 2.5. הראו שלוש הגדרות רקורסיביות של הפונקציה של מספרים טבעיים $f(n) = 2^n$.

פתרון. נראה שלוש הגדרות, שלכל אחת מהן יתרונות וחסרונות שונים.

בראשונה, ערך ההתחלה הוא $f(0) = 1$ והכלל הרקורסיבי הוא $f(n) = 2f(n-1)$ לכל $n > 0$. היתרון של הגדרה זו שהיא פשוטה מאוד ולא דורשת חישוב לוגי מורכב. אבל כדי לחשב את $f(n)$ לפי הגדרה זו נדרשים n צעדים, למשל:

$$f(4) = 2f(3) = 2 \cdot 2f(2) = 2 \cdot 2 \cdot 2f(1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2f(0) = 2^4$$

בשניה, נשים לב כי כאשר n זוגי, אז $2^n = 2^{n/2} \cdot 2^{n/2}$, וכאשר n אי־זוגי, אז $2^n = 2 \cdot 2^{n-1/2} \cdot 2^{n-1/2}$. מכאן נגיע להגדרה עם אותו ערך התחלה, אך הכלל הרקורסיבי יהיה

$$f(n) = \begin{cases} \left(f\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2 & n > 0, n \equiv 0 \pmod 2 \\ 2\left(f\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^2 & n > 0, n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

יתרונה של שיטה זו שהיא דורשת רק $\log n$ צעדים כדי לחשב את n:

$$f(17) = 2f(8)^2 = 2f(4)^4 = 2f(2)^8 = 2f(1)^{16} = 2\left(2f(0)\right)^{16} = 2^{17}$$

כלומר בהיבט של יעילות זמן החישוב, הגדרה זו עדיפה. חסרון שלה הוא שהיא דורשת בדיקת תנאי יותר מסובך.

בהגדרה השלישית נעיר כי כמו בהוכחה באינדוקציה, בהגדרה רקורסיבית לא חייבים לבטא את התלות רק כערך של האיבר "הקודם". ערך ההתחלה נשאר זהה, אך הכלל הרקורסיבי הוא $f(n) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ לכל $n > 0$. יתרון של שיטה זו שאינו דורש שימוש בפעולת הכפל. החסרון שיש בנוסחת נסיגה זו הוא המספר המייגע של צעדים לחישוב $f(n)$. האם אתם מצליחים למצוא הסבר קומבינטורי להגדרה זו?

דוגמה 2.6. נראה פונקציה שמוגדרת על ידי נוסחת נסיגה דו־מימדית. תהא $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדרת עם תנאי ההתחלה $f(0,0) = 1$ וכלל רקורסיבי

$$f(n,m) = \begin{cases} 2f(n-1,m) & \forall n > 0, m \geq 0 \\ 3f(n,m-1) & \forall n \geq 0, m > 0 \end{cases}$$

נחשב לדוגמה את $f(2,3)$:

$$f(3,2) = 2f(2,2) = 2\cdot 2f(1,2) = 2\cdot 2\cdot 2f(0,2) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3f(0,1) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 1 = 2^3 3^2$$

ניתן להוכיח כי $f(n,m) = 2^n 3^m$ לכל $n \geq 0, m \geq 0$ בעזרת עקרון האינדוקציה הכפולה.

2.1 מבוא למחרוזות

תהיה Σ קבוצה סופית שתקרא אלפבית. איברי הקבוצה יקראו אותיות. נגדיר מחרוזת (או מילה) להיות רצף סופי של אותיות מהאלפבית. לעיתים מסמנים את אוסף כל המחרוזות בסימון Σ^+. את קבוצת של המחרוזות ניתן להגדיר באופן רקרוסיבי: כל אות שייכת ל-Σ^+. אם $\alpha, \beta \in \Sigma^+$ הן מחרוזות, אז גם שרשור של המחרוזות $\alpha\beta \in \Sigma^+$ הוא מחרוזת. הקבוצה $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}$ שכוללת גם את המחרוזת הריקה היא אוסף כל המחרוזות שאפשר לבנות מן האלפבית Σ.

הגדרה 2.7. יהא האלפבית של סימני הסוגריים $\Sigma = \{(,)\}$. מחרוזת של סוגריים נקראת מאוזנת אם היא כוללת מספר שווה של סוגריים שמאליים וסוגריים ימניים, ובכל רישא של מחרוזת, מספר הסוגריים השמאליים גדול או שווה למספר הסוגריים הימניים. כלומר מחרוזת מאוזנת היא כזו שמגיעה מביטוי חשבוני תקין.

הגדרה 2.8. הקבוצה D של כל המחרוזות המאוזנות בסוגריים תוגדר באופן רקורסיבי: הבסיס הוא $\varepsilon \in D$. הכלל הרקורסיבי הוא שאם $a, b \in D$, אז גם $(a), ab \in D$.

תרגיל 2.9. הראו כי הקבוצה D אכן כוללת בדיוק את כל המחרוזות המאוזנות של סוגריים.

הוכחה. ההוכחה היא באינדוקציה. מראים שמספר הסוגריים לכל $x \in D$ הוא שווה וכי כל רישא מקיימת את התנאי של הסוגריים השמאליים והימניים. נותר להראות את הכיוון השני, שכל מחרוזת מאוזנת שייכת ל-D. בהמשך נראה מהו מספר המחרוזות המאוזנות של סוגריים מאורך $2n$. $\square$

הגדרה 2.10. יהיו $a, b \in \mathbb{Z}$ מספרים שלמים. נאמר כי a מחלק את b אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש-$ka = b$ ונסמן $a|b$.

2.2 היכרות עם אלגוריתם אוקלידס

הגדרה 2.11. המחלק המשותף המקסימלי (greatest common divisor) של $a, b \in \mathbb{Z}$ מוגדר להיות

$$\gcd(a,b) = (a,b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d|a \wedge d|b\}$$

אם $\gcd(a,b) = 1$ נאמר כי a ו-b זרים.

למה 2.12. אם $n = qm + r$, אזי $\gcd(n,m) = \gcd(m,r)$. (הבחירה באות q היא עבור שבר או מנה, והבחירה באות r היא עבור שארית.)

אלגוריתם 2.13 (אלגוריתם אוקלידס)**.** נחשב את $\gcd(n,m)$ בצורה רקרוסיבית. ערכי ההתחלה הם $\gcd(n,0) = n$ לכל $n > 0$. הכלל הרקורסיבי הוא $\gcd(n,m) = \gcd(m, n \bmod m)$ עבור $n, m > 0$.

2.3 סכום ומכפלה של n מספרים

ההגדרות הפורמליות של פעולות רבות כמו סכום (סימון $\sum$), מכפלה (סימון $\prod$) ואיחוד של מספר קבוצות (סימון $\bigcup$) הן רקורסיביות. פעולות אלו הן קיבוציות (associative בלע"ז) וחילופיות (commutative בלע"ז), אז ניתן לרשום אותן בכל סדר שנרצה.

נשים לב כי הסכום $\sum_{i=1}^{n} x_i$ כאשר $n=0$ מוגדר להיות 0. המכפלה הריקה (כאשר $n=0$) מוגדרת להיות 1. אפשר להגדיר $\sum_{i=r}^{n} x_i$ וגם לקבוצת אינדקסים שרירותית $\sum_{i\in I} x_i$ באופן רקורסיבי. כנ"ל לפעולות האחרות. להזכיר סימון של סכום כפול.

תרגיל 2.14. הוכיחו את התכונות הבאות של סכומים (חלק מהם לתרגיל הבית):

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i$ כאשר $1 \le k < n$.
2. $\sum_i (cx_i) = c\sum_i x_i$ עבור c קבוע.
3. $\sum_i (a_i+b_i) = \sum_i a_i + \sum_i b_i$.

3 קומבינטוריקה

3.1 בעיות מניה בסיסיות

שאלה 3.1. בכמה דרכים אפשר לסדר n אנשים בתור?

פתרון. עבור בחירת הראשון בתור יש n אפשרויות. כעת לבחירת השני בתור נותרו $n-1$ אפשריות. נניח באינדוקציה כי מספר האפשרויות לסדר $n-1$ אנשים בתור הוא $(n-1)!$, ונקבל כי מספר הדרכים לסדר n אנשים בתור הוא $n\cdot(n-1)! = n!$. שימו לב שמגדירים כי $0! = 1$. נאמר כי מספר התמורות של איברי הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ הוא n עצרת. זהו גם מספר הפונקציות החח"ע מהקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ אל עצמה.

נסכם בטבלה את מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים (מניחים בדר"כ $k \le n$):

	עם חזרה	ללא חזרה
עם חשיבות לסדר	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ללא חשיבות לסדר	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

שאלה 3.2. כמה מחרוזות בינאריות יש עם שלוש ספרות?

פתרון. זו בחירה עם חשיבות לסדר ועם חזרה. סה"כ יש $2^3 = 8$ אפשרויות:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$$

שאלה 3.3. כמה "מילים" בנות ארבע אותיות ניתן לבנות מהאלפבית האנגלי, כאשר אסור שבמילה תופיע אותה אות יותר מפעם אחת?

פתרון. מספר המילים החוקיות הוא בחירה עם חשיבות לסדר ללא חזרה של 4 איברים מתוך הקבוצה $\{a, b, \dots, z\}$. כלומר $\frac{26!}{22!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358{,}800$ אפשרויות.

הגדרה 3.4. יהיו $0 \leq k \leq n$ מספרים שלמים. המספר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ נקרא המקדם הבינומי. (בתרגיל הבית אתם תוכיחו בדרך אלגברית כי זה אכן מספר שלם.)

תרגיל 3.5. הוכיחו כי $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

פתרון. בדרך אלגברית קל מאוד לראות זאת לפי ההגדרה. בדרך קומבינטורית נשים לב כי הבעיה של בחירת k עצמים מתוך n עצמים שקולה לבחירת $n-k$ עצמים מתוך n עצמים. מוכיחים זאת לפי פונקציה חח"ע ועל בין תת־הקבוצות בנות k איברים לבין תת־הקבוצות בנות $n-k$ איברים. כל תת־קבוצה נשלחת אל המשלימה שלה.

תרגיל 3.6. בכיתה יש 15 מהנדסי מחשב ו-9 מהנדסי חשמל. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד לכיתה שיכלול 3 מהנדסי מחשב ו-2 מהנדסי חשמל?

פתרון. נבצע שתי בחירות לא תלויות של k אנשים מתוך קבוצה של n אנשים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה. כלומר יש $\binom{15}{3}\binom{9}{2} = 16{,}380$ אפשרויות לבחירת חברי הועד.

תרגיל 3.7. בכמה דרכים ניתן לסדר k אנשים מתוך קבוצה של n אנשים במעגל? (שני סידורים נחשבים זהים אם ניתן להגיע מהאחד אל השני על ידי סיבוב.)

פתרון. תחילה נשים לב כי מספר הדרכים לסידור האנשים בתור הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$. לאחר "שסוגרים" את התור למעגל, כל סידור כזה מתאים ל-k סידורים. כלומר בסך הכל יש $\frac{n!}{(n-k)!k}$ אפשרויות.

תרגיל 3.8. כמה פתרונות שלמים אי־שליליים יש למשוואה $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$?

פתרון. בשיטת "כוכבים ומחיצות" מראים שזה שקול לבחירת k עצמים מתוך n עצמים ללא חשיבות לסדר ועם חזרה. כלומר יש $\binom{n+k-1}{k}$ אפשרויות.

ביתר פירוט: מציגים את $k = 1 + \cdots + 1$ כסכום של אחדות ("כוכבים"), ומחלקים אותם בעזרת $n-1$ מחיצות ל-n גושים (אולי ריקים). מספר האפשרויות לסדרות שבנויות מ-s כוכבים ו-t מחיצות הוא $\binom{s+t}{s}$, ואצלנו יש $n+k-1$ מקומות שצריך למלא עם k כוכבים ו-$(n-1)$ מחיצות, ולכן יש $\binom{n+k-1}{k}$ אפשרויות. התאמה חח"ע ועל בין הפתרונות למשוואה לבין בחירה ללא חשיבות לסדר ועם חזרה מתוך $\{1, \dots, n\}$ היא שבהנתן פתרון $(x_1, \dots, x_n)$ הוא יעבור לבחירה שבה $1 \leq i \leq n$ נבחר x_i פעמים.

תרגיל 3.9. יהיו n כדורים שקופים זהים, ו-n כדורים צבעוניים בצבעים שונים (לא שקופים). בכמה דרכים ניתן לחלק את הכדורים ל-$2n$ תאים מובחנים כך שבכל תא מתקיים (אחד מהסעיפים הבאים):

1. לכל היותר כדור אחד.
2. לכל היותר כדור שקוף אחד.
3. לכל היותר כדור צבעוני אחד.
4. מספר שווה של כדורים שקופים וצבעוניים

פתרון. נחשב

1. לאחר שבוחרים לאן הולכים הכדורים הצבעוניים, המיקום של הכדורים השקופים נקבע לחלוטין לתאים הריקים. נותרו עם בחירה של n תאים מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרה עבור הכדורים הצבעוניים, כלומר $\frac{(2n)!}{n!}$ אפשרויות.
2. אין מגבלה על מספר הכדורים הצבעוניים בכל תא, ולכן זו בחירה של n תאים מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר ועם חזרות, כלומר $(2n)^n$ אפשרויות. מספר האפשרויות לכדורים השקופים הוא בחירה של n תאים מתוך $2n$ תאים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות, כלומר $\binom{2n}{n}$ אפשרויות. בסך הכל $\binom{2n}{n}(2n)^n$ אפשרויות.
3. בבחירה של הכדורים הצבעוניים אנו בוחרים n תאים מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרה, כלומר $\frac{(2n)!}{n!}$ אפשרויות. בבחירה של הכדורים השקופים אין חשיבות לסדר (כי הם זהים), ואין מגבלה לגבי חזרות, כלומר $\binom{2n+n-1}{n}$ אפשרויות. בסך הכל $\frac{(2n)!}{n!}\binom{2n+n-1}{n}$ אפשרויות.
4. כדי לוודא שהתנאי מתקיים נצמיד לכל כדור צבעוני כדור שקוף. כעת מדובר בבחירה עם חשיבות לסדר ועם חזרה של n כדורים אל תוך $2n$ תאים. בסך הכל $(2n)^n$ אפשרויות.

תרגיל 3.10 (ממבחן)**.** בכמה דרכים ניתן לבחור שני מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

פתרון. שני המספרים צריכים להיות מאותה זוגיות. יש לנו שתי בחירות של שני מספרים מתוך 50 ללא חשיבות לסדר וללא חזרה, כלומר $2450 = \binom{50}{2} + \binom{50}{2}$. בדרך אחרת: תחילה נבחר מספר מתוך 100, ואז בגלל הגבלת הזוגיות, נבחר מספר אחד מתוך 49. הסדר של הבחירה לא משנה, אז נחלק ב-$2 = 2!$, ונקבל $2450 = \frac{100\cdot 49}{2}$.

תרגיל 3.11 (ממבחן)**.** בכמה דרכים ניתן לבחור שלושה מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

פתרון. יש שתי סוגי בחירות: שלושה מספרים זוגיים או שני מספרים אי־זוגיים ואחד זוגי. לכן יש בסך הכל $\binom{50}{1}\binom{50}{2}+\binom{50}{3}$ אפשרויות.

הערה 3.12. כמה פעמים השתמשנו מבלי לומר בעקרון הסכום: אם A,B קבוצות סופיות זרות, אז $|A\cup B|=|A|+|B|$. ניתן להסיק כי אם A,B קבוצות סופיות כך ש-$A\subseteq B$, אז $|B\setminus A|=|B|-|A|$. כמו כן השתמשנו בעיקרון המכפלה: אם A,B קבוצות סופיות, אז $|A\times B|=|A|\cdot|B|$. העקרון הזה נכון בחשבון עוצמות גם לקבוצות לא סופיות. לשני עקרונות אלו יש הרחבות גם ליותר משתי קבוצות.

תרגיל 3.13. כמה מספרים בני 4 ספרות ניתן להרכיב מן הספרות $\{1,3,5,7,9\}$ שמופיעה בהם הספרה 3?

פתרון. נתחיל עם פתרון שגוי: אם ספרת האלפים היא 3, אזי נשאר לבחור עם חזרה ועם חשיבות לסדר 3 איברים מתוך 5, כלומר $5^3=125$ אפשרויות. באופן דומה לספרת המאות, ספרת העשרות וספרת האחדות במספר. מעיקרון החיבור ($|A\cup B|=|A|+|B|$ עבור קבוצות זרות) נקבל כי סך הכל יש $4\cdot 5^3=500$ מספרים כאלו.

הפתרון הנ"ל הוא שגוי כיוון שיש מספרים שספרנו כמה פעמים, כאלו שבהם הספרה 3 מופיעה יותר מפעם אחת כמו 3333.

נסמן ב-X את קבוצת כל המספרים בני 4 ספרות המורכבים מהספרות $\{1,3,5,7,9\}$, ונסמן ב-Y את כל המספרים שבהם הספרה 3 לא מופיעה בכלל. אז הקבוצה שאנו מחפשים את עוצמתה היא $X\setminus Y$. כעת, קל לראות כי $|X|=5^4=625$ וגם $|Y|=4^4=256$ ולכן ישנן $|X\setminus Y|=625-256=369$ אפשרויות.

3.2 המקדמים הבינומיים

נוכיח כמה זהויות לגבי המקדמים הבינומיים, הן בשיטות אלגבריות והן בשיטות קומבינטוריות.

משפט 3.14 (נוסחת הבינום של ניוטון [1, 4.3.1])**.** יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$. אז מתקיים
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

הוכחה. מוכיחים על ידי הצגה מפורשת של הביטוי $(a+b)^n$, ורואים כמה פעמים מופיע המונום a^kb^{n-k}. מגיעים למסקנה כי זה מספר הדרכים לבחור k פעמים בדיוק את a מתוך כל אחד מהגורמים באגף שמאל, וזהו המקדם הבינומי. $\square$

דוגמה 3.15. מנוסחת הבינום של ניוטון מקבלים את "נוסחאות הכפל המקוצר" מבית הספר:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

תרגיל 3.16. יהי $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו את הזהות הקומבינטורית הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

פתרון. דרך אלגברית לפתרון התרגיל הוא להציב $a = b = 1$ בנוסחת הבינום.

דרך קומבינטורית לפתרון התרגיל היא לשים לב שהביטוי באגף ימין סופר את מספר תת־הקבוצות של $\{1, \dots, n\}$. באגף שמאל סופרים בדיוק את אותו דבר בצורה שונה, לפי מספר תת־הקבוצות בגודל k בכל פעם של $\{1, \dots, n\}$.

תרגיל 3.17. יהי $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו את הזהות הקומבינטורית הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

פתרון. דרך אלגברית (לא נתעכב עליה עכשיו) היא להציב $a = 1$ ו-$b = x$ בנוסחת הבינום, לגזור, ולהציב $x = 1$.

דרך אלגברית אחרת היא לשים לב כי $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ ולהשתמש בתרגיל הקודם, כי כעת ניתן הוציא את הקבוע n.

דרך קומבינטורית לפתרון התרגיל היא לספור בשתי דרכים שונות את מספר תת־הקבוצות של $\{1, \dots, n\}$ כאשר יש איבר מסומן בתת־הקבוצה. דרך אחת לבחור היא קודם לבחור מתוך $\binom{n}{k}$ תת־קבוצה בגודל k, ואז לסמן איבר מסוים. דרך אחרת היא קודם לבחור מתוך n האיברים את האיבר המסומן, ול- $n-1$ האיברים הנותרים יש 2^{n-1} תת־קבוצות.

משפט 3.18 (נוסחת פסקל)**.** יהיו $k, n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \le k \le n$. אז

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

הוכחה. דרך אלגברית להוכחת הנוסחה היא בתרגיל הבית.

דרך קומבינטורית היא לשים לב כי אגף ימין סופר את מספר תת־הקבוצות בגודל k של $\{1, \dots, n\}$. אגף שמאל סופר את אותו דבר בדרך שונה: אפשר לתאר זאת לפי "סוג" תת־הקבוצה של $\{1, \dots, n\}$ שמסתכלים עליה. סוג אחד הוא שבו האיבר n לא נמצא, ויש $\binom{n-1}{k}$ כאלו. הסוג השני הוא שבו האיבר n כן נמצא, ויש $\binom{n-1}{k-1}$ כאלו. $\square$

כעת ניתן להדגים כמה שורות ממשולש פסקל. הוא עזר זכרון נוח למקדמים הבינומיים. ניתן לשים לב לכך שהאיברים בסדרה $\binom{n}{k}$ עבור $0 \leq k \leq n$ בהתחלה עולים ואז יורדים. לסדרה עם תנאי כזה קוראים אוניימודלית. קל לבדוק זאת בעזרת $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$.

תרגיל 3.19. יהיו $m, k, n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \leq m \leq k \leq n$. אז

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

פתרון. נשאיר את הדרך האלגברית לבית.

בדרך קומבינטורית שני אגפי הזהות סופרים בכמה דרכים ניתן לבחור מתוך קבוצה של n סטודנטים k סטודנטים למועצה ומתוך k הסטודנטים במועצה הכללית לבחור m סטודנטים לועד העליון (אפשר להמחיש גם עם פרלמנט, קואליציה וממשלה (ואחר כך קבינט מצומצם)). אגף שמאל ברור. באגף ימין קודם בוחרים את m הסטודנטים לועד העליון, ואחר משלימים מתוך $n-m$ הסטודנטים שנותרו את החברים במועצה הכללית.

תרגיל 3.20. יהיו $k, n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \leq k \leq n$. אז

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

פתרון. הוכחה אלגברית בעזרת הבינום של ניוטון והצבה $a = 1$, $b = -1$.

דרך קומבינטורית לפתור היא להוכיח שמספר תת־הקבוצות של $\{1, \ldots, n\}$ בגודל זוגי שווה למספר תת־הקבוצות של $\{1, \ldots, n\}$ בגודל אי זוגי. עושים זאת על ידי התאמה חח"ע ועל שמוסיפה או מחסירה את האיבר n מכל קבוצה זוגית. שימו לב שלהתאים את הקבוצה המשלימה תכשל אם גם n וגם k זוגיים.

תרגיל 3.21. יהיו $k, n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \leq k \leq n$. אז

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

פתרון. בדרך אלגברית ניתן להוכיח זאת עם נוסחת פסקל או על ידי

$$2 \cdot 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$

ובעזרת החלפה $j = k - (n+1)$ ושימוש בזהות $\binom{2n+1}{j+n+1} = \binom{2n+1}{n-j}$ נקבל את הדרוש.

בדרך קומבינטורית אגף ימין הוא מספר תת־הקבוצות של $\{1,\dots,2n+1\}$ שלא כוללות את האיבר $2n+1$. אגף שמאל סופר כמה תת־קבוצות של $\{1,\dots,2n+1\}$ הן לכל היותר בגודל n. התאמה חח"ע ועל תתאים לתת־קבוצה שלא מכילה את $2n+1$ את עצמה אם היא לכל היותר בגודל n, ואחרת תתאים את המשלימה שלה (שחייבת להיות בגודל גדול מ-n).

3.3 פתרון בעיות מניה על ידי נוסחאות נסיגה

הגדרה 3.22. נגדיר באופן רקורסיבי את סדרת פיבונצ'י: תנאי ההתחלה הם $F_1 = F_2 = 1$ ונוסחת הנסיגה היא $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ לכל $n \geq 2$. דוגמה לכמה ערכים בסדרה: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$.

כמה בעיות מניה שיש להן את אותה נוסחת נסיגה כמו לסדרת פיבונצ'י:

- מספר הדרכים לכסות לוח משבצות בגודל $2 \times n$ על ידי אבני דומינו.
- כנ"ל לגבי לוח בגודל $1 \times n$ על ידי אבני דומינו ומונומינו (שזה כמו מספר הצירופים של המספר n על ידי 1 ו-2).
- מספר תת הקבוצות של $\{1,\dots,n\}$ שאינן מכילות זוג מספרים עוקבים.

הגדרה 3.23. מספרי סטירלינג מהסוג השני סופרים את מספר החלוקות של הקבוצה $\{1,\dots,n\}$ ל-k חלקים (זרים, לא ריקים) בדיוק, עבור $1 \leq k \leq n$. הסימון שאנחנו נשתמש הוא $\left\{ n \atop k \right\}$ ומקובל גם $S(n,k)$. הפונקציה הזו מוגדרת על ידי נוסחת נסיגה: $\left\{ n \atop 1 \right\} = \left\{ n \atop n \right\} = n$ ולכל $2 \leq k \leq n-1$,

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}$$

(שימו לב לדמיון לנוסחת פסקל).

ברור שיש רק חלוקה אחת של $\{1,\dots,n\}$ לחלק אחד, וזו היא עצמה. יש גם רק חלוקה אחת ל-n תת קבוצות: $\{\{1\},\dots,\{n\}\}$. הסבר לנוסחת הנסיגה ניתן לראות כאשר מסתכלים על חלוקות שבהן $\{n\}$ הוא תת קבוצה, וחלוקות שבהן n נמצא בתת קבוצה יותר גדולה. לדוגמה

$$\left\{ 4 \atop 2 \right\} = \left\{ 3 \atop 1 \right\} + 2\left\{ 3 \atop 2 \right\} = \left\{ 3 \atop 1 \right\} + 2\left(\left\{ 2 \atop 1 \right\} + 2\left\{ 2 \atop 2 \right\}\right) = 1 + 2(1 + 2 \cdot 1) = 7$$

תרגיל 3.24. הוכיחו כי $\left\{ n \atop k \right\} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left\{ i \atop k-1 \right\}$.

תרגיל 3.25. הוכיחו כי $\left\{{n \atop 2}\right\} = 2^{n-1} - 1$. נסו לעשות זאת ללא שימוש בנוסחאות רקורסיביות. מה הקשר לחידת מגדלי האנוי?

תרגיל 3.26. הוכיחו כי $\left\{{n \atop n-1}\right\} = \binom{n}{2}$.

תרגיל 3.27. הוכיחו שמספר הפונקציות $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ שהן **על** הוא $k!\left\{{n \atop k}\right\}$.

הגדרה 3.28. מספרי קטלן (Catalan) C_n סופרים את מספר מחרוזות הסוגריים המאוזנות עם n סוגריים שמאליים ו-n סוגריים ימניים, שהוא $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

עובדה 3.29. מספר קטלן C_n סופר גם את מספר הילוכי הסריג $(0, 0) \to (n + 1, n)$ הנמצאים ממש מתחת לישר $y = x$. בספר של סטנלי, *Enumerative Combinatorics Vol. 2*, יש מעל 60 פירושים קומבינטוריים למספרי קטלן (ובאתר שלו יש קובץ עם יותר מ-200 פירושים).

טענה 3.30. $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n+1}{n} - 2\binom{2n}{n-1}$

הגדרה 3.31. למספרי קטלן יש נוסחת נסיגה לפי $C_0 = C_1 = 1$ וכן

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$$

עבור $n > 1$. ניתן להוכיח זאת עם ספירת מספר המחרוזות המאוזנות המינימליות מאורך k (כאלו שאין להם רישא שהיא מאוזנת), שנסמנו $P(k)$. כלומר $C_n = \sum_{k=1}^{n} P(k)C_{n-k}$, ונותר להוכיח $P(k) = C_{k-1}$. עושים זאת על ידי השמטה של התו הראשון והתו האחרון במחרוזת המאוזנת המינימלית.

תרגיל 3.32. הוכיחו כי $C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

פתרון. הוכחה קומבינטורית היא שימוש בשיוויון $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$. הרי לבחור n עצמים מתוך $2n$ עצמים יכולה להעשות בשני שלבים: תחילה לבחור i עצמים מתוך n העצמים הראשונים, ואז לבחור $n - i$ עצמים מתוך n העצמים האחרונים.

מקורות

[1] נ. ליניאל ומ. פרנס, מתמטיקה בדידה, הוצאת נ. בן צבי.

[2] www.math-wiki.com