תרגיל בית 8 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 14.1.2018.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$. ראיתם במשפט האיזומורפיזם הרביעי (משפט ההתאמה) את הקשר בין תת־חבורות של ${}^{G}\!/_{H}$ לבין תת־חבורות של G המכילות את H.

א. הוכיחו שאם $K_1, K_2 \in G$ תת־חבורות המכילות את H, אז

$$(K_1/H) \cap (K_2/H) = (K_1 \cap K_2)/H$$

ב. מכך שאנו יודעים שתת־החבורה הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-K_1 וב-K_2 היא $K_1 \cap K_2$, נסחו והוכיחו טענה דומה עבור $(K_1 \cap K_2)/H$.

שאלה 2. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$. הוכיחו שאם $N_1, N_2 \lhd G$ תת־חבורות נורמליות המקיימות $N_1 \cap H = N_2 \cap H$, אז $(HN_1)/N_1 \cong (HN_2)/N_2$.

שאלה 3. תהי G חבורה סופית, ויהי $g \in G$ איבר מסדר k. הוכיחו שהשיכון ממשפט קיילי שולח את g למכפלת מחזורים זרים מאורך k.

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 4. תהי G חבורה סופית ותהינה $H, N \leq G$ תת־חבורות.

א. הפריכו ש-$HN \leq G$ היא תמיד תת־חבורה.

ב. אם $H, N \lhd G$ נורמליות כך ש-$([G:H], [G:N]) = 1$, הוכיחו כי $G = HN$.
אתגר רשות: אפשר לוותר על הדרישה לנורמליות, והטענה תשאר נכונה!

שאלה 5 (משפט האיזומורפיזם השלישי)**.** תהי G חבורה, תהינה $H, K \lhd G$ תת־חבורות נורמליות, ונניח $H \subseteq K \subseteq G$, אז

$$(G/H)/(K/H) \cong G/K$$

בשאלה זו נוכיח את המשפט בעזרת משפט האיזומורפיזם הראשון לפי הדרכה. כחימום, קודם כל ודאו שאתם מבינים למה $H \lhd K$ ולמה טבעי להגדיר הומומורפיזם $f\colon {}^{G}\!/_{H} \to {}^{G}\!/_{K}$ לפי $f(gH) = gK$.

א. הוכיחו ש-f מוגדר היטב. כלומר, שאם $g_1H=g_2H$, אז $f\left(g_1H\right)=f\left(g_2H\right)$.

ב. הוכיחו ש-f הומומורפיזם.

ג. הוכיחו ש-f על.

ד. הוכיחו כי $\ker f={}^{K}/_{H}$.

ה. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 6. תהי שרשרת עולה של חבורות $G_1\subseteq G_2\subseteq G_3\subseteq\ldots$, ונסמן $H=\bigcup_i G_i$ עבור איחודן. אפשר לקבל כעובדה שגם H היא חבורה (זו הייתה מסקנה של שאלת רשות 9 בתרגיל בית 4).

א. הוכיחו שאם G_i היא חבורה פשוטה לכל i, אז גם H פשוטה.
הערה: כך ניתן ליצור חבורות פשוטות אינסופיות מחבורות פשוטות סופיות.

ב. תהי S חבורה פשוטה אינסופית. הוכיחו שאם $K\leq S$ תת־חבורה, אז $[S:K]=1$ או $[S:K]=\infty$. רמז: העידון של משפט קיילי.

שאלה 7.

א. תנו דוגמה לחבורה G ולפעולה נאמנה שלה על קבוצה X כך ש-$(|G|,|X|)=1$.
הזכרו שבכיתה הוכחנו שאם בנוסף מניחים כי G היא חבורת-p, אז חייבות להיות נקודות שבת לא טריוויאליות.

ב. יהי $p>2$ ראשוני. תנו דוגמה לפעולה נאמנה של $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ על הקבוצה $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_p$.

שאלה 8. תהי G חבורה ותהי $N\lhd G$. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם $K\lhd G$ וגם $N\cong K$, אז ${}^{G}/_{N}\cong{}^{G}/_{K}$.

ב. אם ${}^{G}/_{N}\cong G$, אז $N=\{e_G\}$.

ג. אם N חבורת-2 לא טריוויאלית, וגם ${}^{G}/_{N}$ חבורת-2 לא טריוויאלית, אז G אבלית.

ד. תת־חבורת הקומוטטורים G' היא אבלית.

שאלה 9. רמז: מכפלת ראשוניים, או חבורות שכבר הכרנו.

א. תנו דוגמה לחבורה G שיש לה אינסוף תת־חבורות ואינסוף חבורות מנה האיזומורפיות ל-G עצמה.

ב. תנו דוגמה לחבורה אינסופית שאף תת־חבורה ואף חבורת מנה שלה איזומורפיות אליה.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 10. תהי G חבורה מסדר n. הוכיחו כי השיכון $G\to S_n$ ממשפט קיילי אינו שיכון לתוך A_n אם ורק אם תת־חבורה 2-סילו של G היא ציקלית לא טריוויאלית. רמז: העזרו בשאלה 3.

שאלה 11. חבורה G תקרא מטא-אבלית אם יש לה תת־חבורה נורמלית $N\lhd G$ כך שגם N אבלית וגם ${}^{G}/_{N}$ אבלית. רמז כללי: נסו להשתמש במשפטי האיזומורפיזמים.

א. הוכיחו שחבורה G היא מטא-אבלית אם ורק אם G' היא אבלית (כלומר כל שני קומוטטורים של איברי G מתחלפים).

ב. הוכיחו שכל תת־חבורה של חבורה מטא-אבלית היא גם מטא-אבלית.

ג. הוכיחו שכל חבורת מנה של חבורה מטא-אבלית היא גם מטא-אבלית.

בהצלחה!