

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מספרי הקורס: 8821105 + 8821108
המרצה: מיכאל מגרל
המתרגלים: אפי כהן וגילי גולן
תאריך: 13.09.2012 מועד א'
חומר עזר: רק מחשבון רגיל
משך המבחן: שעתיים וחצי

יש לפתור בדיוק 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה 25 נקודות)
בנוסף יש גם שאלת בonus השווה 5 נקודות.
נמקו היטב את כל התשובות.

השאלות:

1.

- הוכיחו את משפט Sylow 1 (הקיום של ת"ח סילו).
- הוכיחו או הפריכו: קיימת חבורה פשוטה עם 99 אלמנטים.
- תנו דוגמה של חבורה פתירה אינסופית לא אבלית.

2.

- מצאו את כל החבורות מסדר 325 (עד כדי איזומורפיזם).
- כמה חבורות אבליות בגודל 500 קיימות המכילות איבר מסדר 4 (עד כדי איזומורפיזם)?
- כמה מחלקות צמידות בגודל גדול מ 10 קיימות בחבורה סימטרית S_7 ?

3.

- הוכיחו את המשפט: לכל אגודה סופית יש אידמפוטנט (ז"א איבר המקיים $x^2 = x$).
- האם סופיות היא חשובה בסעיף א' ?
מצאו את כל האידמפוטנטים באגודות הבאות:
 (\mathbb{Z}_{10}, \cdot) $(\{0,1\}^{(0,1)}, \circ)$
- בעזרת משפט אוילר על החזקות מצאו 2 ספרות האחרונות של המספר 7644430809627^{199} .

4.

- א. הוכיחו שלכל חבורה אבלית סופית G קיימת $n \in \mathbb{N}$ כך שהמכפלה $G \times U_{10}$ היא תמונה אפימורפית של \mathbb{Z}^n (כרגיל U_{10} היא חבורת אוילר).
ב. הוכיחו או הפריכו: קיים מונומורפיזם $\mathbb{Z}_{12} \rightarrow S_8$.
ג. מצאו את כל האוטומורפיזמים ותתי חבורות עבור החבורה $\Omega_2 \times \Omega_2$?

5.

- א. כמה ריבועים לא שקולים, עד כדי סיבובים ושיקופים, קיימים אם מותר לצבוע את הקודקודים ב-2 צבעים נתונים. תנו מיון מלא של המחלקות דרך הנציגים (אחד מכל המחלקה).
ב. הוכיחו את המשפט: כל פעולה הומוגנית $G \times X \rightarrow X$ היא איזומורפית לפעולה מהצורה $G \times G/H \rightarrow G/H$.
ג. הוכיחו או הפריכו: לפעולה $G \times Y \rightarrow Y$ של חבורה $G := D_4$ מעל קבוצה Y בעלת 1959 אלמנטים תמיד יש נקודת שבת.

שאלת הבונוס: (5 נקודות)

- נניח H_1, H_2 תתי חבורות של G בעלות אינדקס סופי ב- G .
הוכח שאז גם תת חבורה $H_1 \cap H_2$ היא בעלת אינדקס סופי ב- G .

☺ **בהצלחה ושנה טובה !**