אלגברה מופשטת 1 קיץ 2013

תרגול 11

הערה: אפריורית אין בחבילות הבסיס של $LaTeX$סימן של איחוד זר (אני עצמי עצלן מכדי לתכנת פונקציה שתעשה זאת) ולכן סימנתי אותו כ$\sqcup$.
הערה נוספת:בכל מקום בו לא ניקדתי, סימן שמדובר במֶרְכָּז $Z(G)$ ולא במְרַכֵּז C_a

הגדרה:

1.תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. נקודת שבת של g∈Gהיא נקודה $x \in X$ כך שמתקיים $g * x = x$.

2.עבור $g \in G$נסמן בX_gאת אוסף נקודות השבת של g: $X_g = \{x \in X : g * x = x\}$ למשל $X_e = X$

3. נאמר ש$x \in X$ היא נקודת שבת של Gאם לכל $g \in G$,$g * x = x$.

(נקראת גם "נקודת שבת משותפת")

תרגיל:

נתונה הפעולה $G \times X \to X$, כאשר $|X| = 23, |G| = 49$. הוכיחו שקיימת לפעולה זו נק' שבת משותפת. (הערה:לפעולה של כפל משמאל (נדבר עליה בהמשך) אין נקודות שבת משותפות. אין נקודה שכל החבורה לא מזיזה אותה.($G \times G \to G$ כך ש$g * h = gh$ אזי $\nexists h \in G : \forall g \in G, gh = h$)

לגבי מסלול $orb(x) = G * x = \{g * x \mid g \in G\}$ ידוע ש$|G * x| \mid |G|$ (כי $|G * x| = \sum [G : Stb(x)]$).

הערה: X הוא איחוד זר של המסלולים כלומר $X = \bigsqcup_{x_i \in X} G * x_i$.$\Leftarrow$ $|X| = \sum |G * x_i|$.

שימו לב: אם $|G * x_i| = 1$ אזי x_iהיא נקודת שבת משותפת. לכן נוכיח שקיים x_iשכזה.

לכל x_i: $|G * x_i| \mid |G|$. לכן $|X|$ הוא סכום $23 = |X| = n \cdot 1 + m \cdot 7 + k \cdot 49$. כמובן $k = 0$. $23 = n \cdot 1 + m \cdot 7$. לא יתכן ש$n = 0$ שכן $7 \nmid 23$ולכן $n > 0$.

לכן יש לפחות מסלול אחד באורך 1 $\Leftarrow$קיימת לפחות נק' שבת משותפת אחת. מ.ש.ל.$\square$

קצת סדר לגבי מונחים מרכזיים:$G \times X \to X$

-מסלול $[x] = orb(x) = G * x = \{g * x \mid g \in G\}$.

-$X = \bigsqcup_{x_i \in X} G * x_i$

־$|G| \mid |G * x_i|$.

־המייצב: $G \geq Stb(x) = \{g \in G : g * x = x\}$.

־$|G * x_i| = [G : Stb(x)]$

־פעולת ההצמדה:

למסלול תחת פעולת ההצמדה נקרא $G * x_i = conj(x) = \{gxg^{-1} : g \in G\}$

למייצב תחת פעולת ההצמדה אנו קוראים המֶרכָז

$Stb(x) = C_x = \{g \in G : gxg^{-1} = x\}$ וכמו כן: $Z(G) \subseteq C_x$.

<u>הלמה של ברנסייד Burnside</u>

תהא G חבורה סופית הפועלת על קבוצה X. נסמן: k־ מס' המסלולים של הפעולה, אזי: $k = \frac{1}{|G|}\sum |X_g|$.

<u>תרגיל:</u>

אנו מעוניינים לצבוע סרט עם 6 משבצות ב־4 צבעים. שני סרטים הם שקולים אם אפשר להגיע מאחד לשני ע"י שיקוף. מצאו את מספר האפשרויות השונות לצביעת הסרט (עד כדי שקילות).

<u>פתרון:</u>

נגדיר את המבנים $\underline{G = \mathbb{Z}_2, X = (\mathbb{Z}_4)^6}$ (כאשר X קבוצה עליה אנו מפעילים את החבורה G)

$$0 * (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

וכן מתקיים:

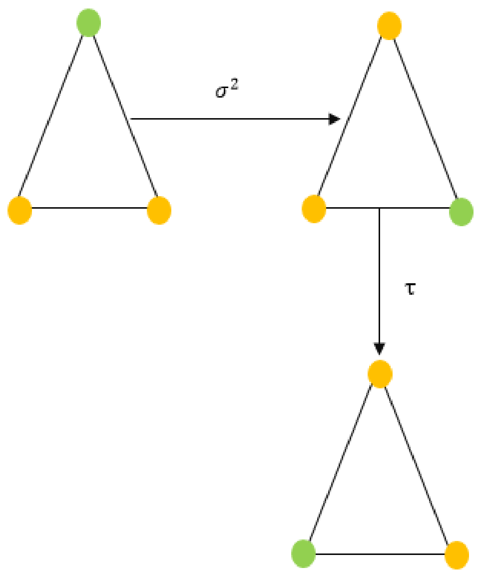
$$1 * (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$$

מחפשים את מספר המסלולים של הפעולה: $k = \frac{1}{2}(|X_0| + |X_1|)$.

נשים לב ש:$X_0 = X \Rightarrow |X_0| = 4^6$ (כיוון שאין הגבלות על בחירת הצבע כי הזהות לא מזיזה), $|X_1| = 4^3$. כלומר $k = \frac{1}{2}(4^3 + 4^6)$.) מ.ש.ל.

<u>תרגיל:</u>מצאו את מספר המשולשים השונים (עד כדי סיבוב ושיקוף) אשר מתקבלים ממשולש משוכלל נתון, אם מותר לצבוע כל קודקוד בשלושה צבעים שונים.

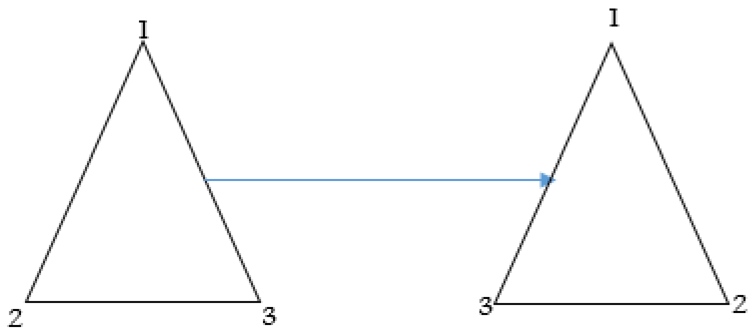
שרטוט להמחשת התרגיל:



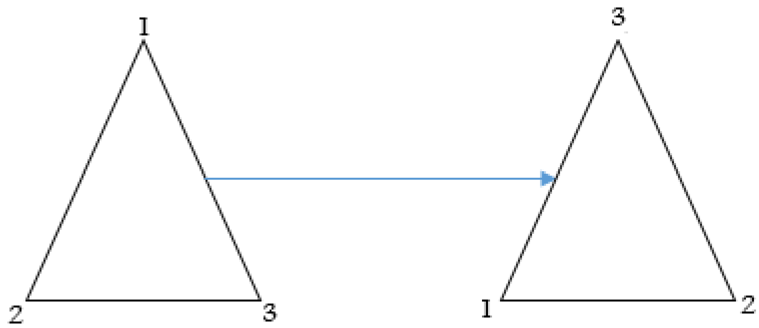
$G=D_3, X=(\mathbb{Z}_3)^3$ (כאשר ה3 התחתי מיועד למס' הצבעים והעילי למס' הקודקודים).

$|X_{id}|=|X|=3^3$

$|X_\tau|=3^2=|X_{\tau\sigma}|=|X_{\tau\sigma^2}|$ כמו שניתן לראות לדוגמה בציור הבא:



$|X_\sigma|=3=|X_{\sigma^2}|$ (השיוויון נובע כיוון שσ^2היא סיבוב בכיוון הנגדי).



לכן מס' הצביעות (המסלולים) השונות הוא:

$k=\frac{1}{6}(3^3+3\cdot 3^2+2\cdot 3)$. מ.ש.ל

חבורות p

<u>הגדרה:</u> Gהיא חבורת p אם $|G|=p^n$.

[חזרה טובה] נוכיח שהמרכז של חבורת pהוא לא טריוויאלי:

תהא G חבורת p:$|G|=p^n$. נחקור את מחלקות הצמידות והמרכז שלה. נתבונן בפעולה של Gעל עצמה ע"י הצמדה: $G\times G\to G$.

$g*x\mapsto gxg^{-1}$. לפעולה זו יש מסלולים $x_i\in G:conj(x_i)$ומתקיים $G=\bigsqcup conj(x_i)$. נזכיר: $x_i\in Z(G)\Leftrightarrow conj(x_i)=\{x_i\}$.

$G=Z(G)\cup\bigsqcup_{x\notin Z(G)} conj(x_i)\Rightarrow |G|=|Z(G)|+\sum_{x_i\notin Z(G)}|conj(x_i)|$. המרכז הוא ת"ח ולכן הסדר שלו חזקה של p. כל אחד מהקונג'ים מחלק את הסדר של החבורה ולכן גם הם חזקה של p, ז"א:$p^n=p^\alpha+\sum\beta_ip^{\alpha_i}$. אם נניח בשלילה שהמרכז אכן טריוויאלי נקבל:

$p^n-1=\sum\beta_ip^{\alpha_i}$. לא יתכן כיוון ש$p\mid\sum\beta_ip^{\alpha_i}$ אבל $p\nmid p^n-1$ וזו סתירה.

<u>לסיכום:</u> אם G חבורת p אזי $\{e\}\neq Z(G)$.

<u>משוואת המחלקות</u>

$|G|=|Z(G)|+\sum_{a\notin Z(G)}[G:C_a]$.

<u>תרגיל:</u>

כתבו את משוואת המחלקות של החבורה S_3.

<u>פתרון:</u>

המרכז של S_nעבור $n\geq 3$ הוא טריוויאלי $Z(S_n)=\{id\}$. כמו כן מס' מחלקות הצמידות

הוא $\rho(3)=3$.

הסבר: נזכור שתמורות ב־S_n הן צמודות אמ"ם יש להן אותו מבנה מחזורים. לכן מספר מחלקות הצמידות הוא כמספר מבני המחזורים. אצלנו מבני המחזורים הם $(-),(--),(--)\ (-)$ $(-)$. לכן: $6=1+3+2$.

<u>תרגיל (שימושי בש"ב):</u> תהא G חבורה לא אבלית מסדר p^3 ונניח $a\notin Z(G)$. הוכיחו:

א. $|Z(G)|=p$

ב. $|C_a|=p^2$.

ג. $|conj(a)|=p$

<u>פתרון:</u>

א. האפשרויות לסדרי המרכז הן $|Z(G)| = \{1, p, p^2, p^3\}$. נפסול אותן להנאתנו:

- p^3 לא יתכן כיוון וG לא אבלית
- 1 לא יתכן כיוון שהמרכז של חבורת p הוא לא טריוויאלי.
- אם $|Z(G)| = p^2 \Leftarrow |G/_{Z(G)}| = p$ ולכן $G/_{Z(G)}$ ציקלית בסתירה לטענה שהוכחנו.

לכן, $|Z(G)| = p$.

ב. $|C_a| = ?$.

$|C_a| \neq p^3$ כי אם $C_a = G$ אזי $a \in Z(G)$בסתירה לנתון. מתקיים

$|C_a| \geq |\{a\} \cup Z(G)| > p \Leftarrow \{a\} \cup Z(G) \subseteq C_a$ ולכן $|C_a| = p^2$.

ג. $|conj(a)| = ?$

$|conj(a)| = [G : C_a] = \frac{p^3}{p^2} = p$.

מ.ש.ל

<u>דוגמה לתרגיל:</u>

$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ אזי $|G| = 5^3$ ועל כן: $|Z(G)| = 5$.

<u>תרגיל :</u>

תהי Gחבורה מסדר $p^n, (n \geq 1)$. תהי $\{e\} \neq N \triangleleft G$. הוכיחו ש- $\{e\} \neq N \cap Z(G)$.

<u>פתרון:</u>

אם $x \in Z(G)$ אזי $conj(x) = \{x\}$. על מנת להראות שהחיתוך הנ"ל אינו טריוויאלי מ"ל שקיים $e \neq y \in N$ כך ש-$conj(y) = \{y\}$ ($|conj(y)| = 1$).

<u>תזכורת:</u> כל תח"נ היא איחוד זר של מחלקות הצמידות של איבריה (לא נכון לגבי ת"ח רגילה!). לכן: $N = \bigsqcup_{x_i \in N} conj(x_i)$. $|N| = \sum_{x_i \in N} |conj(x_i)|$. $N \leq G \Leftarrow$ קיים $1 \leq k \leq n$: $|N| = p^k$.

$p^k = \sum_{x_i \in N} |conj(x_i)| = 1 + \sum_{e \neq x_i \in N} |conj(x_i)|$ ואזי $p^k - 1 = \sum \beta_i p^{\alpha_i}$ אם כל ה$\alpha_i > 0$נקבל סתירה. לכן קיים i: $\alpha_i = 0$ אך אז מקבלים שקיים $x_i \in N$כך ש:

$|conj(x_i)| = 1 \Rightarrow x_i \in Z(G) \Rightarrow e \neq x_i \in N \cap Z(G)$ וזה מוכיח את הדרוש. מ.ש.ל

<u>משפט קושי (השימושי והפשוט ביותר בתחום):</u>

תהא Gחבורה סופית ויהי p כך ש$p \mid |G|$ אזי קיים בGאיבר מסדר p.

למשל בחבורה מסדר 28 יש איבר מסדר 7 ויש איבר מסדר 2.

משפטי סילו Sylow

תהא G חבורה כך ש-$|G| = p^k m$ כאשר $(m,p) = 1$. ת"ח p-סילו של G היא $H \leq G$ כך ש-$|H| = p^k$

דוגמה:

לדוגמה נביט ב:$|S_3| = 2 \cdot 3$.

ת"ח 3-סילו: $<(123)>=<(132)>$ (הופכים אחד של השני).

ת"ח 2-סילו: $<(23)>, <(13)>, <(12)>$.

משפט סילו 1:

תהא G חבורה סופית. אם $p \mid |G|$ אז קיימת ל-G ת"ח p-סילו.

טענה: בחבורת p יש תת חבורה מכל סדר שמחלק את סדר החבורה.

מסקנה (מהטענה ומסילו):

לכל חבורה סופית G, אם $p^k \mid |G|$, אזי יש ל-G ת"ח מסדר p^k.

דוגמה:

נסתכל לדוגמה ב-D_4. $|D_4| = 8 = 2^3$.

ת"ח 2- סילו של D_4 היא D_4 בעצמה.

לפי המסקנה קיימת תת חבורה מסדר 4: למשל $<\sigma>$ ות"ח מסדר 2: למשל $<\tau>$.

הערה חשובה: חבורת p- סילו היא חבורת p המקסימלית.