מערך תרגול 7 מופשטת 3

הגדרה 7.1 תהי K/F הרחבת שדות. חבורת גלואה של ההרחבה היא החבורה של כל ההומומורפיזמים $\varphi : K \to K$ שמקיימים ש $\varphi(x) = x$ לכל $x \in F$. במילים אחרות: כל ה F- אוטומורפיזמים של K. במילים אחרות: כל האוטומורפיזמים של K שהם גם העתקות לינאריות של מרחבים וקטוריים מעל F. חבורת גלואה מסומנת $\mathrm{Gal}(K/F)$.

הדבר המרכזי שנעשה בקורס הזה הוא ללמוד הרחבת שדות באמצעות חבורת גלואה.

תרגיל 7.2 יהי $\varphi \in \mathrm{Gal}(K/F)$ ויהי $f(x) \in F$ פולינום המאפס את a. הראו כי $\varphi(a)$ הוא גם שורש של $f(x)$.

פתרון: עשינו את זה כבר, ובטח גם ראיתם בהרצאה. אם

$$f(x) = c_0x^n + \ldots + c_n$$

אז

$$c_0a^n + \ldots + c_n = 0$$

מפעילים φ על שני האגפים ומקבלים את הדרוש כי φ מקבע את כל המקדמים.

הערה 7.3 כמובן שבדר"כ ניקח את $f(x)$ להיות הפולינום המינימלי של a מעל F.

האבחנה הזאת כבר נותנת לנו כלי חזק להבין חבורות גלואה.

תרגיל 7.4 חשבו את חבורת גלואה של $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

פתרון: הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ הוא $x^3 - 2$. יהי $\varphi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$. $\varphi(\sqrt[3]{2})$ הוא גם שורש של $x^3 - 2$. אבל $\varphi(\sqrt[3]{2})$ הוא מספר ממשי ולכן בהכרח $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$.טוב. אז מה זה עוזר לנו בחיים? כעת נשתמש במשפט שכבר הוכחנו בעבר. אם $\varphi, \psi : F(a_1, \cdots, a_n) \to F(a_1, \cdots, a_n)$ הן פונקציות שמסכימות על F ועל האיברים $\{a_1, \cdots, a_n\}$ אז $\varphi = \psi$. משמעות עדכנית: שני איברים בחבורת גלואה של $F(a_1, \cdots, a_n)/F$ שמסכימים על $\{a_1, \cdots, a_n\}$ הם שווים. במקרה שלנו, היות ש $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \mathrm{id}(\sqrt[3]{2})$ נקבל ש $\varphi = \mathrm{id}$ ולכן $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}) = \{1\}$ היא החבורה הטריוויאלית.

תרגיל 7.5 חשבו את חבורת גלואה של $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\rho)/\mathbb{Q}$ כאשר ρ שורש יחידה פרימיטבי מסדר 3.

פתרון: היות ש $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\rho)$ ו $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ הן הרחבות איזומורפיות של $\mathbb{Q}$. גם כאן חבורת גלואה היא טריוויאלית.

תרגיל 7.6 חשבו את חבורת גלואה של $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

פתרון: הפולינום המינימלי של $\sqrt[4]{2}$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ הוא כמובן $x^2 - \sqrt{2}$. אם $\varphi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ אז לפי מה שראינו קודם

$$\varphi(\sqrt[4]{2}) = \pm\sqrt[4]{2}$$

אם

$$\varphi(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}$$

אז כבר הבנו ש $\varphi = \mathrm{id}$ וזה בוודאי איבר בתוך חבורת גלואה. עכשיו נבדוק את האפשרות:

$$\varphi(\sqrt[4]{2}) = -\sqrt[4]{2}$$

(אזהרה! בשלב הזה אנחנו לא יודעים בכלל אם קיימת φ שמקיימת את הנ"ל. השוו לתרגיל הקודם בו גילינו עם שיקול הממשיות שאין φ המקיימת $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\rho$.)

היות שזו בסך הכל הרחבה מסדר 2 אנחנו יודעים שאפשר לכתוב איברים של $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ בצורה

$$a + b\sqrt[4]{2}$$

כאשר $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. אם אכן קיימת φ כנ"ל אז בהכרח מתקיים

$$\varphi(a + b\sqrt[4]{2}) = a - b\sqrt[4]{2}$$

ניתן לבדוק את כל הדרישות ולראות שזה אכן אוטומורפיזם המקבע את $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. לכן בחבורת גלואה יש שני איברים. יש רק חבורה אחת (עד כדי איזומורפיזם) בעלת שני איברים והיא $\mathbb{Z}_2 \cong S_2$. כמו שניתן לראות, אפילו בדוגמאות פשוטות לא ממש קל לראות מה היא חבורת גלואה. אנחנו צריכים כלים יותר מתוחכמים.

נתחיל ממשהו שכבר הוכחנו:

תזכורת 7.7 נניח ש $f(x) \in F[x]$ פולינום אי פריק ו E הוא שדה הפיצול של F. יהיו a, b שורשים של שדה הפיצול אז יש

$$\varphi : E \to E$$

המקבעת את איברי F ומקיימת $\varphi(a) = b$.
בשפה עדכנית: קיים $\varphi \in \mathrm{Gal}(E/F)$ המקיים $\varphi(a) = b$.

עם הטענה הזאת אפשר לפשט את הפתרון של השאלה הקודמת. היות ש $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ הוא שדה הפיצול של $x^2 - \sqrt{2}$. היינו יכולים לדעת מייד שקיים φ כך ש

$$\varphi(\sqrt[4]{2}) = -\sqrt[4]{2}$$

ולא היה צריך להתאמץ בשביל זה.

אזהרה! שימו לב שמשפט זה (ועוד אחרים שנראה) עובדים רק עבור חבורת גלואה של שדה פיצול של פולינום כלשהוא. אם תביטו על הדוגמא הראשונה תראו ששם אין

$$\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\rho$$

ובאמת $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ הוא לא שדה פיצול של $x^3 - 2$ (בהמשך הקורס נוכיח שהוא לא שדה פיצול של שום פולינום).

עוד כלי מועיל הוא המשפט הבא:

תרגיל 7.8 יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום עם שדה פיצול E. נניח שהשורשים של f ב E הם $a_1, \cdots, a_n$. הוכיחו כי $\mathrm{Gal}(E/F)$ משוכנת בתוך S_n.

פתרון: תהי $\varphi \in \mathrm{Gal}(E/F)$. כבר ראינו שלכל i מתקיים

$$\varphi(a_i) \in \{a_1, \cdots, a_n\}$$

(φ מעבירה שורשי פולינום לפולינום). ולכן הצמצום של φל $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$. מהווה פונקציה מוגדרת היטב. היות ש φ חד־חד ערכית, גם הצמצום שלה חד־חד ערכי ולכן יש לנו איבר של S_n, נסמן אותו π_φ. כעת נותר להוכיח כי ההתאמה

$$\phi(\varphi) = \pi_\varphi$$

היא שיכון של חבורות. ראשית נשים לב שאם

$$\phi(\varphi) = \pi_\varphi = \pi_{\varphi'} = \phi(\varphi')$$

זה בעצם אומר ש φ ו φ' מסכימים על כל שורשי הפולינום ולכן ראינו כבר ש

$$\varphi = \varphi'$$

כלומר ϕ היא אכן חד־חד ערכית. נותר לבדוק שהיא הומומורפיזם, נשים לב ש

$$\phi(\varphi)\phi(\varphi') = \pi_\varphi \pi_{\varphi'}$$

$$\phi(\varphi\varphi') = \pi_{\varphi\varphi'}$$

וקל לראות שמתקיים

$$\pi_\varphi \pi_{\varphi'} = \pi_{\varphi\varphi'}$$

הערה 7.9 את הטענה האחרונה אפשר לנסח גם בצורה הבאה: חבורת גלואה פועלת על שורשי הפולינום $f(x)$. כלומר יש כאן פעולה של חבורה על קבוצה.

עכשיו נתחיל להשתמש בכלים שראינו ונפתור מקרה יותר מסובך.

תרגיל 7.10 חשבו את $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של הפולינום $x^3 - 2$.

פתרון: ראשית נשים לב ששורשי הפולינום הם $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\rho, \sqrt[3]{2}\rho^3$ כאשר ρ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 3. ולכן חבורת גלואה היא תת חבורה של S_3. זה כבר מידע משמעותי. נתחיל בלזהות מיידית 2 איברים של חבורת גלואה. כברור שהאוטומורפיזם הטריוויאלי נמצא בחבורת גלואה. כמו כן, גם פונקציית הצמידות $z \to \overline{z}$ היא אוטומורפיזם של E ששונה מ id ומקבע את $\mathbb{Q}$. נשים לב מה צמידות עושה לשורשים:

$$\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{2}\rho \to \sqrt[3]{2}\rho^2$$

$$\sqrt[3]{2}\rho^2 \to \sqrt[3]{2}\rho$$

לכן היא מתאימה לתמורה $(2,3)$ של S_3. עכשיו נשים לב ש

$$E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \rho)$$

ולכן איברי החבורה "נקבעים" לפי הפעולה שלהם על ρ, $\sqrt[3]{2}$. לפי משפט ממקודם, קיים אוטומורפיזם $\varphi \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ המקיים

$$\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\rho$$

אבל לא ברור כל כך מה עושה לשאר השורשים. נשים לב שהפולינום המינימלי של ρ הוא x^2+x+1 והשורשים שלו הם ρ, ρ^2. ולכן

$$\varphi(\rho) \in \{\rho, \rho^2\}$$

נבדוק את שתי האופציות: אם $\varphi(\rho) = \rho$אז התמורה ש φ מבצעת על השורשים היא $(1,2,3)$. כך שבחבורת גלואה יש גם את $(1,2,3)$ וגם את $(2,3)$ אבל שתי התמורות האלה פורשות את כל S_3 ולכן

$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_3$$

אם דווקא $\varphi(\rho) = \rho^2$ אז התמורה על השורשים יוצאת $(1,2)$. שוב, התמורות $(1,2), (2,3)$ פורשות את כל S_3 ולכן גם באפשרות הזאת:

$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_3$$

ולכן

$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_3$$

הערה: באמת חבורת גלואה מכילה את שתי האופציות שבחנו, אבל זה לא כזה ברור. עצם העובדה ש ρ, ρ^2 הם שורשים של איזה פולינום לא מכריח שתהיה φ שמקיימת גם $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\rho$וגם

$$\varphi(\rho) = \rho$$

או

$$\varphi(\rho) = \rho^2$$