מבנים אלגבריים 1

תרגיל 5

הגשה בתוך שבועיים לידי המתרגל בלבד

שאלה 1

מצאו את כל המחלקות הימניות של תת-חבורה H בחבורה G במקרים הבאים, אם G אינה אבלית, פרטו גם את המחלקות השמאליות.

א. $H = \langle 5 \rangle$, $G = (\mathbb{Z}_{20}, +)$.

ב. $H = 8\mathbb{Z}$, $G = (2\mathbb{Z}, +)$.

ג. $H = \langle 10 \rangle$, $G = (U_{11}, \cdot)$.

ד. $H = \langle \sigma \rangle$, $G = D_4$. (σ סיבוב ב -90 מעלות)

ה. $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}^* : x > 0\}$, $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

ו. $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$.

שאלה 2 (מתנה)

על פי ההגדרה, עבור חבורה G ותת-חבורה $H < G$, H ת"ח נורמלית, דהיינו $H \lhd G$, אם לכל $g \in G$ מתקיים ש $gH = Hg$.

הוכיחו כי $H \lhd G$ אם ורק אם $\forall g \in G \quad \forall h \in H \quad ghg^{-1} \in H$

שאלה 3:

תהי G חבורה, ותהיינה H_1, H_2 תת- חבורות של G, כש - H_1 היא תת-חבורה נורמלית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $H_1H_2 = \{h_1h_2 : h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_3\}$ תת-חבורה של G .

ב. H_1H_2 תת-חבורה נורמלית של G .

ג. H_1H_2 תת-חבורה נורמלית של G , בהינתן שגם H_2 היא תת-חבורה נורמלית של G.

ד. $H_1 \cap H_2$ תת-חבורה נורמלית של G , בהינתן שגם H_2 היא תת-חבורה נורמלית של G.

שאלה 4:

תהי $Q_8 = \{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת ע"י:

$ijk = k^2 = j^2 = i^2 = 1$. חבורה זו נקראת חבורת הקווטרניונים. נא לשים לב <u>שבמרומז</u> משמות האיברים מתקיים ש $(-1)\cdot i = -i,\ (-1)\cdot j = -j,\ (-i)\cdot(-j) = i \cdot j$ וכדומה.

א. השלימו את לוח הכפל של Q_8.

ב. מצאו את כל תתי החבורות של Q_8.

ג. הוכיחו שכל תת חבורה של Q_8 היא תת חבורה נורמלית. (רמז: בדקו את האינדקס של תתי החבורות).

שאלה 5:

תהי G חבורה ותהי $S \subset G$ תת-קבוצה. עבור $x, g \in G$ נסמן בקיצור $x^g = g^{-1}xg$.

א. הראו כי $C_G(S) = \{ g \in G : s^g = s \ \ \forall s \in S\}$ היא תת-חבורה של G. ($C_G(S)$ נקראת המרכז (*centralizer*) של S ב- G.
ב. הראו כי $Z(G) = C_G(G)$ היא ת"ח נורמלית של G. ת"ח זו נקראת המרכז (*center*) של G.
ג. תהי $N_G(S) = \{ g \in G : S^g = S \}$ באשר $S^g = \{s^g \ : s \in S\}$ הראו כי $N_G(S)$ היא ת"ח של G והראו ש $C_G(S)$ היא ת"ח נורמלית של $N_G(S)$.

שאלה 6:

תהי G חבורה. נגדיר את "חבורת הקומוטטור" של G ליהיות $S = \{ [x,y] \ : \ x,y \in G\}$ כאשר $[x,y]$ מסמן את האיבר $x^{-1}y^{-1}xy$.

א. הראו ש S ת"ח נורמלית של G .
ב. אם $H < G$ כך ש $S < H$ אזי $H \lhd G$.

שאלה 7:

תהי D_4 החבורה הדיהדרלית $a, b \in D_4$ (כאשר b איבר מסדר 2 – שיקוף, ו-a איבר מסדר 4 – סיבוב ב- 90 מעלות).

נגדיר את תתי החבורות הציקליות $\mathrm{K} = \langle \mathrm{a}^2 \rangle$, $\mathrm{H} = \langle \mathrm{b} \rangle$.

א) כתבו במפורש את אברי תת החבורה H ו-K. חשבו את $[\mathrm{G}:\mathrm{K}], [\mathrm{G}:\mathrm{H}]$.

ב) כתבו את המחלקות השמאליות של H ו- K ב- G. האם הן תת חבורות נורמליות?

שאלה 8:

הגדרה: חבורה G נקראת "פשוטה" אם אין לה תת-חבורות נורמליות לא טריוויאליות (דהיינו שתת החבורות הנורמליות היחידות שלה הן $\{1\}$ ו- G).

נתון ש $G_1 \subseteq \mathrm{G}_2 \subseteq G_3 \cdots \subseteq \mathrm{G}_\mathrm{n} \subseteq \cdots$ חבורות פשוטות. הוכיחו שגם $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ חבורה פשוטה.

שאלה 9:

תהיינה G ו- H חבורות. הוכיחו שאם חבורת המכפלה $G \times H$ היא ציקלית אז G ו- H ציקליות.

שאלה 10:

הוכיחו כי $H = \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ \ a \in \mathbb{Q}\}$ היא תת- חבורה של $GL_2(\mathbb{Q})$. מצאו את האינדקס $[G:H]$ של H ב- G.