

מתמטיקה בדידה – תרגיל 9

1.

- א. תהי הקבוצה $B_k = \{n^k \mid n \in \mathbb{N}\}$, כאשר $k \in \mathbb{N}$. הוכח ש- $|\mathbb{N}| = |B_k|$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (בשאלה זו קבוצה \mathbb{N} אינה מכילה את 0).
- ב. הוכח שאם $|A \setminus B| = |B \setminus A|$ אז $|A| = |B|$.

2.

- א. הוכח או הפרך: אם $|A| = |B|$ אז קיימת פונקציה f חח"ע מ- A ל- B שהיא לא על.
- ב. תהי K קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונאליים. הוכח ש- K אינה בת מניה.
- ג. מצא מהי עוצמת הקבוצה: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - \pi) \in \mathbb{Q}\}$ (למשל, $\pi, \pi + 0.189 \in A$).

3.

- א. תהי A קבוצת עיגולים זרים במישור. הוכח כי $|A| \leq \aleph_0$ (עיגול במישור מוגדר באופן הבא: $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$, כאשר $a, b, r \in \mathbb{R}$ ו- $r > 0$).
- ב. תהי B קבוצת מעגלים זרים במישור. האם בהכרח $|B| \leq \aleph_0$? (מעגל במישור מוגדר באופן הבא: $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$, כאשר $a, b, r \in \mathbb{R}$ ו- $r > 0$).

4. הוכיחו ש- $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{0, 1\}$.

5. הוכיחו ש- $\{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

בהצלחה!