בוחן בפונקציות מרוכבות תשע"ז

יש לענות על כל 3 השאלות. נמקו היטב תשובותיכם.

1. תהי $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ פונקציה אנליטית בכל $\mathbb{C}$ המקיימת כי

$$u(x,y) = -v(x,y)$$

לכל x,y. הוכיחו כי f קבועה.
פתרון: טובץ אז אם f אנליטית היא מקיימת את משוואות קושי רימןת כלומר

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

אבל היות שנתון לנו ש

$$u = -v$$

נוכל להציב זאת במשוואות שלמעלה ולקבל

$$-v_x = v_y$$

$$-v_y = v_x$$

מכאן בהכרח נקבל

$$v_x = v_y = 0$$

ולכן לפי משוואות קושי רימן

$$u_x = u_y = 0$$

וזה כפי שראינו בכיתה מבטיח ש f קבועה.

2.

(א) הוכיחו כי הפונקציה $\sin z$ אינה חסומה. (בלי להשתמש במשפט ליוביל!).
פתרון: לפי נוסחא

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

לכן, אם x מספר ממשי אז

$$\sin ix = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = \frac{i}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

כלומר

$$|\sin ix| = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ניתן לראות שכשאר $x \to \infty$ אז

$$|\sin ix| \to \infty$$

ולכן $\sin$ לא חסומה.

(ב) הוכיחו או הפריכו:

$$\lim_{z\to 0} z \sin \frac{1}{z} = 0$$

פתרון: נסתכל על הסדרה

$$z_n = \frac{1}{in}$$

ונציב אותה בפונקציה שלנו

$$z_n \sin \frac{1}{z_n} = \frac{1}{in} \sin in$$

לפי הסעיף הקודם אנחנו יודעים שזה שווה ל

$$\frac{1}{in} \sin in = \frac{1}{in} \frac{i}{2}(e^n - e^{-n}) = \frac{e^n - e^{-n}}{2n}$$

כאשר $n \to \infty$ הסדרה הזאת שואפת ל ∞ גם כן ולכן לא ייתכן ש

$$\lim_{z\to 0} z \sin \frac{1}{z} = 0$$

סתירה.

3. נגדיר מסילה $\gamma(t)$ המורכבת מחיבור של 2 המסילות הבאות:

$$\gamma_1(t) = \sqrt{2}e^{it} \quad \frac{\pi}{4} \le t \le \pi$$
$$\gamma_2(t) = -\sqrt{2} + t(\sqrt{2} - 1) \quad 0 \le t \le 1$$

(א) ציירו את המסילה γ.

פתרון: קשה לי לתת ציור במחשב אבל זה בסך הכל חלק ממעגל ברדיוס $\sqrt{2}$ סביב ראשית הצירים שמתחיל ב $1 + i$ ומסתיים ב $-\sqrt{2}$. ואז קו ישר שמתחיל ב $-\sqrt{2}$ ומסתיים ב -1.

(ב) חשבו את

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{z}\mathrm{d}z$$

נמקו היטב את צעדיכם!

פתרון: לשמחתנו ל $\frac{1}{z}$ יש פונקציה קדומה בתחום הרלוונטי. נגדיר ענף של arg שנקרא לו $\arg_1$ ונגיד שהוא מחזיר ערכים בתחום $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ובאמצעותו נגדיר ענף של הלוגריתם שנקרא לו L_1. במילים אחרות, אנחנו מוצאים התחום ההגדרה את הציר הדמיוני השלילי ומגדירים ענף של log בדרך הרגילה. L_1 אנליטי בכל תחום הגדרתו שכולל את המסילה γ. והנגזרת שלו היא $\frac{1}{z}$ לכן כדי לחשב את האינטגרל אפשר פשוט להציב את הקצוות ב L_1.

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = L_1(-1) - L_1(1+i)$$

$$L_1(-1) = \pi i$$

$$L_1(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i$$

ולכן בסך הכל האינטגרל שווה ל

$$\pi i - (\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i) = \frac{3\pi}{4}i - \ln\sqrt{2}$$

וזהו.