פיתרון תרגיל בית 4 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ט

21 במאי 2019

1. כמה הילוכי שריג $(8,8) \to (0,0)$ יש, שאינם נוגעים בישר $y = x + 4$?

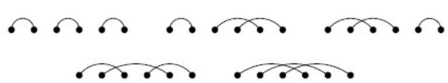
פתרון אנחנו יכולים, ע"י הזזה, להסתכל על זה כעל הילוכים $(12,8) \to (4,0)$ שאינם נוגעים בישר $y = x$. כמה כאלה יש?
תחילה נבדוק כמה הילוכים $(12,8) \to (4,0)$ יש באופן כללי: מתוך 16 הצעדים צריך לבחור 8 שיהיו ימינה, והשאר למעלה, לכן כל בחירה של מיקום 8 הצעדים למעלה (ללא חשיבות לסדר כי כל ההילוכים למעלה נראים אותו דבר, וללא חזרה כי אי אפשר להגדיר במיקום ספציפי יותר מצעד אחד) מגדירה הילוך.
לכן בסה"כ מספר ההילוכים הכללי הוא $\binom{16}{8}$.
כמה הילוכים פסולים יש? נתאים כל הילוך פסול מ $(4,0)$ ל $(12,8)$, להילוך כללי מ $(4,0)$ ל $(8,12)$ ע"י שיקוף ההילוך הנתון בישר $y = x$ החל מנקודת הנגיעה הראשונה בישר (כלומר, החל מנק' הנגיעה הראשונה כל צעד למעלה הופך לצעד ימינה, וימינה ללמעלה). זו התאמה הפיכה כי יש לה התאמה הופכית, זו המשקפת כנ"ל מנק' הנגיעה הראשונה (ובהילוכים מ $(4,0)$ ל $(8,12)$ תמיד יש נגיעה). קיבלנו שמס' ההילכוים הפסולים הוא כמספר ההילוכים הכללי $(4,0) \to (8,12)$, וכאן צריך לבחור 4 צעדי ימינה מתוך 16 הצעדים שישנם, כלומר $\binom{16}{4}$.
בסה"כ סך ההילוכים הכשרים הוא $\binom{16}{8} - \binom{16}{4}$.

2. כמה סדרות של n אחדות (1) ו־ n "מינוס אחדות" (-1) יש, כך שכל הסכומים החלקיים (מההתחלה עד איבר כלשהו) הינם אי־שליליים?

פיתרון זהו מספר קטלן C_n. נראה זאת ע"י העתקה חח"ע ועל למחרוזות הסוגריים המאוזנות: פשוט נעתיק כל 1 ל"פותח" וכל -1 ל"סוגר". זו פונקציה חח"ע ועל

כי הרכבה עם הפונקציה ההופכית (התאמת פותח ל־1 וסוגר ל־-1) תתן את הזהות בשני הצדדים. הסכומים החלקיים האי־שליליים מבטיחים שבכל שלב יש אחדות לפחות כמספר ה"מינוס אחדות", ולכן בהתאמה נקבל מחרוזת מאוזנת.

3. נתבונן ב־$2n$ קודקודים על ציר ה־x (ממוקמים על הטבעיים $\{1,\dots 2n\}$, לצורך נוחות). אנו רוצים לחבר זוגות ע"י קשת מעל הקודקודים באופן שאין אף קשת ממש מעל קשת אחרת. כמה אפשרויות יש לעשות זאת? הדרכה אפשרית: בהינתן זוג קודקודים (i,j) שיש ביניהם קשת, נתייחס אליה כקשת מהקטן לגדול. נניח שאנחנו עוברים על הקודקודים משמאל לימין, ונפתחו כמה קשתות, איזו תיסגר ראשונה? דוגמא עבור $n=3$:



איור 1:

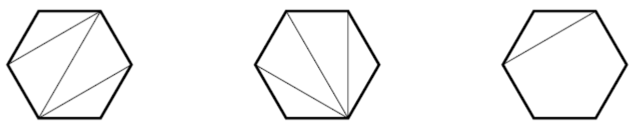
פיתרון נתאים קשתות כנ"ל למחרוזות סוגריים ע"י: כל קשת (i,j) כאשר $i<j$ תותאם להשמת "פותח" במקום ה־i ו"סוגר" במקום ה־j. נקבל מחרוזת סוגריים מאוזנת כי אם בשלב מסויים יש יותר סוגרים מפותחים, זאת אומרת שבאחת הקשתות הפכנו את הסדר (כלומר, התייחסנו לקשת כ־(i,j) כאשר $j<i$, בשונה מהמוגדר לפי ההתאמה $i<j$) בסתירה. ההתאמה ההופכית, לצורך בדיקת חח"ע ועל, תהיה להתאים למחרוזת סוגריים בחירת קשתות באופן הבא: "פותח" יותאם להתחלת קשת, ו"סוגר" יסגור את הקשת הראשונה שנפתחה וטרם נסגרה. לכן מספר הקשתות הנ"ל הוא מספר קטלן C_n.

4. כמה סדרות של n מספרים שלמים $(a_1,...,a_n)$ יש המקיימים: $1\leq a_1\leq ...\leq a_n$, ובנוסף: $\forall 1\leq i\leq n:\ a_i\leq i$?

פיתרון התשובה היא שזהו מספר קטלן C_n. נראה התאמה להילוכי סריג מ־$(0,0)$ ל־(n,n) שעוברים מתחת לישר $x=y$. נשים לב שכל הילוך נקבע לפי סדרת הגבהים של הכניסות לעמודה ה־i, לכל $1\leq i\leq n$. הסבר: הפרש הגבהים בין שתי עמודות צמודות אומר כמה הילוכים "למעלה" יש לפני הילוך ה"ימינה" הבא. לכן, נתאים כל סדרה $(a_1,...,a_n)$ לסדרת הגבהים $(a_i-1,...,a_n-1)$ (מורידים 1 כיון שהגובה המקסימלי להיכנס לעמודה ה־i הוא $i-1$). מקבלים סדרת גבהים "כשרה" כיון שמדובר בסדרה עולה חלש, בונוסף, התנאי $a_i\leq i$

(או בגבהים $a_i - 1 \leq i - 1$) אומר שלא חוצים את הישר $y = x$, ולכן לא ניתן להגיע לעמודה i בגובה i אלא רק לכל היותר $i - 1$. ההתאמה חח"ע ועל לפי ההתאמה ההופכית, השולחת הילוך המוגדר לפי סדרת הגבהים לסדרה כנ"ל, ע"י הוספת 1 לכל איבר.

5. יהי P מצולע משוכלל בן $n + 2$ צלעות. אלכסון של P הוא קו ישר המחבר שני קודקודים של P ואינו צלע של המצולע. נאמר ששני אלכסונים לא נחתכים אם אין להם נקודה משותפת בחלקו הפנימי של P. שילוש של מצולע הוא חלוקה שלו למשולשים על ידי קבוצה מקסימלית של אלכסונים לא נחתכים. לדוגמא:



איור 2:

כאשר במשושה מצד ימין מסומן רק אלכסון אחד, ומצד שמאל ובאמצע 2 שילושים שונים.

(א) הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי כל מצולע משוכלל בן $n + 2 \geq 3$ צלעות ניתן לשילוש ושיש בשילוש $n - 1$ אלכסונים.

(ב) כמה שילושים אפשריים יש למצולע משוכלל בן $n+2$ צלעות? הדרכה: בחרו שני קודקודים סמוכים, אז הקשת ביניהם נמצאת באיזשהו משולש בשילוש המצולע, ובחירת הקודקוד השלישי מחלקת את המצולע לשני תתי מצולעים. (עבור $n = 0$ הניחו שיש 'שילוש' אחד).

פיתרון א. נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n = 1$, ברור שהטענה נכונה וניתן לשלש משולש בעזרת $n - 1 = 0$ אלכסונים. הרי המצולע הוא כבר משולש.
נניח את נכונות הטענה לכל $1 \leq k < n$, ונוכיח עבור n:
נמתח אלכסון כלשהו בין שני קודקודים במצולע (ודאי ניתן לעשות כך, כי המצולע הוא משוכלל, וכל אלכסון בין שני קודקודים נמצא בחלקו הפנימי). האלכסון מחלק את המצולע לשני תת־מצולעים קמורים, שאם לאחד מהם $k + 2 \geq 3$ צלעות, אז לשני יש $n - k + 2$ צלעות. ניתן להבין זאת בכך שהאלכסון שמתחנו משמש כצלע נוספת של שני תת־המצולעים.
לפי הנחת האינדוקציה את תת־המצולע הראשון ניתן לשלש בעזרת $k - 1$ אלכסונים, ואת תת־המצולע השני ניתן לשלש בעזרת $n - k - 1$ אלכסונים.
יחד עם האלכסון הראשון שמתחנו, נקבל כי את המצולע ניתן לשלש עם

$n-1=(k-1)+(n-k-1)+1$ אלכסונים.

ב. עבור $n=1$, יש רק את "השילוש הריק", ולכן יש שילוש אחד. בקלות ניתן לשים לב גם כי עבור $n=2$ (ריבוע) יש שני שילושים אפשריים. נראה שמקבלים את מספר קטלן C_n (בעזרת אינדוקציה מלאה, כלומר אחרי הוכחת הבסיס נניח נכונות לכל $2\leq k\leq n$ ונוכיח ל־$n+1$):

יהי P מצולע עם $(n+1)+2$ קדקודים. נסמן את קודקודי המצולע ב־$v_1,v_2,\ldots,v_{n+3}$ בכיוון השעון. נתמקד בצלע (v_1,v_{n+3}) בשילוש כלשהו. ישנן $n+1$ אפשרויות לקודקוד שלישי במשולש אליו שייכת הצלע: $\forall k\in\{v_2,\ldots,v_{n+2}\}$ הקודקוד יכול להיות v_k (כל צלע נמצאת באיזשהו שילוש). באופן דומה לסעיף הקודם, חילקנו את המצולע לשני תת־מצולעים $(v_1,\ldots v_k$, $v_k,\ldots v_{n+3})$ בתוספת המשולש $\Delta v_1,v_{n+3},v_k$. בתת מצולע הראשון יש k קודקודים, ולכן ניתן לשלשו, לפי הנחת האינדוקציה ב־C_{k-2} דרכים. בתת המצולע השני יש $n+3-(k-1)=n-k+4$ קודקודים, ולכן ניתן לשלשו ב־C_{n-k+2} דרכים. נסכום על k, וכיון ש־$k\in\{v_2,\ldots,v_{n+1}\}$ נקבל:

$$\sum_{k=2}^{n+2}C_{k-2}C_{n-k+2}$$

ע"י הזזת אינדקסים $k'=k-2$ נקבל שזה שווה לסכום הבא:

$$\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}$$

והסכום האחרון הוא, לפי מה שהוכח בהרצאה, מספר קטלן C_{n+1}. מש"ל.

6. כמה עצים בינאריים במישור יש עם $2n+1$ קודקודים, כך שלכל קודקוד שאיננו עלה יש שני בנים, אחד ימני ואחד שמאלי (בעץ כזה יש n קודקודים פנימיים, ועוד $n+1$ עלים, סה"כ $2n+1$ קודקודים)?

פתרון נפתור באינדוקציה בעזרת נוסחת הנסיגה, כלומר, נוכיח באינדוקציה שמספר העצים מקיים את נוסחת הנסיגה, ולכן זה מספר קטלן:

עבור $n=0$ מדובר בעץ עם קודקוד בודד, ויש אחד כזה, עבור $n=1$ מדובר בעץ עם שורש ושני עלים, ויש אחד כזה. נניח נכונות לכל $0\leq k\leq n$ (שמספר העצים הנ"ל מקיים את נוסחת הנסיגה) ונוכיח עבור $n+1$: יהי T עץ בינארי עם $2(n+1)+1$ קודקודים, שלכל קודקוד שאיננו עלה יש שני בנים. כיון שהשורש איננו עלה, יש לו שני בנים, אחד ימני ואחד שמאלי. מכל אחד מהם יוצא תת עץ, שגם בו מתקיים, כמובן, שלכל קודקוד שאיננו מלא יש שני בנים. לכל $0\leq k\leq n$, אם בתת העץ השמאלי יש $2k+1$ קודקודים אז בתת העץ

הימני יש $2(n-k)+1$ קודקודים (כי ביחד נקבל $2n+2$ קודקודים, ובתוספת השורש יש $2n+3$ קודקודים). לפי הנחת האינדוקציה יש C_k אפשרויות לתת העץ השמאלי ו־C_{n-k} לתת העץ הימני, ולכן לכל $0 \leq k \leq n$ יש $C_k \cdot C_{n-k}$ אפשרויות לעץ. נותר לסכום על כל ה־k־ם האפשריים לקבל שסך העצים הנ"ל עם $2n+3$ קודקודים הוא

$$\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_{n+1}$$

ולכן קיבלנו מספר קטלן.