

זהבית צבי
 כל הזכויות שמורות ©

גיאומטריה אוקלידית, אקסיומות החפיפות - פתרון תרגיל 3

להגשה בתאריך 12.12.17

תרגיל 1

חלק ממשפט C-4

- אם ידוע $AB > CD$ ו- $CD \cong EF$, אז $AB > EF$.

הוכחה

נתון כי $AB > CD$. לפי הגדרת היחס $<$ בין קטעים, קימת נקודה P בין A ו- B כך ש-
 $AP \cong CD$. נתון גם $CD \cong EF$, אז לפי אקסיומה C-2 מקבלים $AP \cong EF$ ושוב לפי הגדרת
 $AB > EF$:<

- אם $AB < CD$ ו- $CD < EF$ אז $AB < EF$ (טרנזיטיביות).

הוכחה

מכיוון ש- $AB < CD$, קימת נקודה P בין C ו- D כך ש- $AB \cong CP$. מכיוון שנתון כי
 $CD < EF$ קימת נקודה Q בין E ל- F כך ש- $CD \cong EQ$. לפי משפט C-3 קימת נקודה
 יחידה R בין E ל- Q , כך ש- $CD \cong ER$.
 מכיוון שגם $AB \cong CP$, לפי אקסיומה C-2 מקבלים $AB \cong ER$. לפי בחירת הנקודות Q, R
 מתקיים היחסים: $E * R * Q$ ו- $E * Q * F$.
 לפי משפט B.3 מתקיים $E * R * F$, לכן $ER < EF$ ובסה"כ $AB < EF$.

תרגיל 2

הוכיחו את משפט C.6:

- זוויות קודקודיות הן חופפות זו לזו.
- כל זווית שחופפת לזווית ישרה היא בעצמה זווית ישרה.

הוכחה

א. $\sphericalangle ABC$ היא משלימה ל- 180° עבור זווית $\sphericalangle ABE$.
 $\sphericalangle DBE$ היא משלימה ל- 180° עבור זווית $\sphericalangle ABE$.
 לפי אקסיומה C-5 $\sphericalangle ABE \cong \sphericalangle ABE$ ולכן לפי משפט C-5 זוויות שמשלימות ל- 180°
 של זוויות חופפות ($\sphericalangle ABE$) הן חופפות $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DBE$ "מש"ל.

ב. בניח $\sphericalangle ABC$ היא זווית ישרה ונתון $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle ABC$.
 צריך להוכיח ש- $\sphericalangle DEF$ ישרה.

בניח שנקודה P היא על הקרן ההפוכה ל- \overline{BC} ונקודה Q היא על הקרן ההפוכה ל- \overline{EF} .
 לפי הגדרת זווית ישרה צריך להוכיח ש- $\sphericalangle QED \cong \sphericalangle DEF$.

זהבית צבי
 כל הזכויות שמורות ©

נתון כי $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ (*). לפי משפט $C-5$ זוויות המשלימות ל- 180° של זוויות חופפות הן חופפות, כלומר $\angle ABP \cong \angle DEQ$ (**).
 לפי הגדרה ש- $\triangle ABC$ זווית ישרה היא חופפת למשלימה שלה כלומר $\triangle ABC \cong \triangle ABP$ (***)
 ולכן לפי אקסיומה $C-5$ $\triangle ABC \cong \triangle DEQ$.
 לפי (***) ו- $C-5$ ומהסקנות שהגענו אליהם,
 $\triangle DEF \cong \triangle DEQ$ ישרה עפ"י הגדרה.

תרגיל 3

משפט C.9: היפוך של משפט C.1

אם ב- $\triangle ABC$ יש לנו $\angle B = \angle C$ אז $AB \cong AC$ ו- $\triangle ABC$ שווה שוקים.

הוכחה

נחשיב את ההתאמה של הקודקודים $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C, C \leftrightarrow B$.

לפי אקסיומה $C-2$, $BC \cong CB$ כל קטע חופף לעצמו.

נתון $\angle C = \angle B$ לפי משפט $C-8$ קריטריון ז.צ.ז. $\triangle ABC \cong \triangle ACB$.

לכן לפי הגדרת משולשים חופפים נקבל ש- $AB \cong AC$ ומכאן נובע ש- $\triangle ABC$ שווה שוקים.

תרגיל 4

משפט C.11:

נתון קרן \overrightarrow{BG} בין \overrightarrow{BA} ל- \overrightarrow{BC} , קרן \overrightarrow{EH} בין \overrightarrow{ED} ל- \overrightarrow{EF} , $\triangle CBG \cong \triangle FEH$,
 ו- $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. הוכיחו כי $\triangle GBA \cong \triangle HED$.

הוכחה

נניח בשלילה כי $\triangle GBA \not\cong \triangle HED$.

לפי אקסיומה $C-4$ קימת קרן יחידה \overrightarrow{EX} בצד נתון של הישר \overrightarrow{EH} כך

ש- $\triangle GBA \cong \triangle HEX$, ולכן $\overrightarrow{EX} \neq \overrightarrow{ED}$ קרן יחידה שמקימת את חפיפת הזוויות.

נתון $\triangle CBG \cong \triangle FEH$ ולפי הנחת השלילה $\triangle HEX \cong \triangle GBA$. לכן לפי משפט $C-10$

נקבל $\triangle ABC \cong \triangle XEF$.

בנוסף נתון $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ולכן לפי אקסיומה $C-5$ נקבל: $\triangle DEF \cong \triangle XEF$.

לפי יחידות הקרן שתתן שוויון בין זוויות אלו חייב להתקיים $\overrightarrow{EX} = \overrightarrow{ED}$ וקיבלנו סתירה להנחה

$\triangle GBA \cong \triangle HED$ מש"ל.

זהבית צבי
 כל הזכויות שמורות ©

תרגיל 5

חלק ממשפט C-12

• אם ידוע $\sphericalangle P > \sphericalangle Q$ ו- $\sphericalangle R \cong \sphericalangle Q$, אז $\sphericalangle P > \sphericalangle R$.

הוכחה

נסמן $\sphericalangle P = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle Q = \sphericalangle DEF$ ו- $\sphericalangle R = \sphericalangle GHI$.
 מכיוון שנתון כי $\sphericalangle ABC > \sphericalangle DEF$, קימת קרן \overrightarrow{BX} בין \overrightarrow{BA} ל- \overrightarrow{BC} כך ש-
 $\sphericalangle XBC \cong \sphericalangle DEF$. לפי אקסיומה 5 - $\sphericalangle XBC \cong \sphericalangle GHI$, לכן $\sphericalangle ABC > \sphericalangle GHI$.

בהצלחה ☺