תרגיל בית 3 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ח

(הערה: טרם הגדרנו באופן פורמלי מה זה חבורות איזומורפיות. לעת עתה נעבוד עם ההגדרה האינטואיטיבית שחבורות הן איזומורפיות אם הן נראות בדיוק אותו דבר. בתרגילים הרלוונטיים, על מנת להוכיח ששתי חבורות הן לא איזומורפיות, מצאו שתכונה שמתקיימת באחת ולא בשניה. למשל: בחבורה אחת קיים מסדר k, ובחבורה השניה לא. חבורה אחת היא ציקלית והאחרת לא. וכו')

שאלה 1. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה ואם לא מצא דוגמא נגדית:

1. כל חבורה צקלית היא אבלית.
2. כל חבורה אבלית היא צקלית.
3. תת חבורה הנוצרת ע"י איבר אחד היא תמיד צקלית.
4. אם $o(a) = n$ אז $a^{-1} = a^{n-1}$.

שאלה 2. חשבו את סדר החבורות (כלומר, מספר האיברים בחבורה) $U_{12}, U_{14}, H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$

שאלה 3. רשמו את לוחות הכפל של U_5, U_8.
פתרו את המשוואות הבאות:

1. $22x = 1$ ב$\mathbb{Z}_{117}$.
2. $-11x + 2 = 19$ ב$\mathbb{Z}_{24}$.

שאלה 4. תהי G חבורה ויהיו $a, b \in G$ איברים. הוכיחו כי $o(ab) = o(ba)$.
היזהרו: לא הנחנו שהחבורה אבלית!

שאלה 5. תהי $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ חבורה אבלית. נסמן $b = a_1 a_2 \cdots a_n$.
הוכיחו כי $b^2 = e$.

שאלה 6. הוכיחו כי $U_8 \ncong \mathbb{Z}_4$ (העזרו בסדר של איברים).

שאלה 7. בשאלה הקודמת ראינו שסדר האיברים יכול להראות לנו שחבורות הן לא איזומורפיות. כעת נראה שההפך לא נכון, יש חבורות אם איברים באותם סדרים שהן לא איזומורפיות.

1. הוכיחו כי בחבורת הייזנברג מודולו 3

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\} \leq GL_3(\mathbb{Z}_3)$$

כל האיברים (פרט ליחידה) הם מסדר 3.

2. הוכיחו כי ב$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ כל האיברים (פרט ליחידה) הם מסדר 3.

3. הראו כי $H \ncong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

שאלה 8. היזכרו בשאלה 5 של תרגיל בית 1, הוכיחו כי בחבורה מסדר זוגי מספר האיברים מסדר 2 הוא אי-זוגי.

בהצלחה!