שיעור חזרה – טופולוגיה (2012)

<u>מבחן 2011, מועד מיוחד, שאלה 4</u>

4. תהי $p \notin \mathbb{R}$ ויהי $X = \{p\} \cup \mathbb{R}$, תהי $\tau = \left\{ O \subseteq X : p \notin O \ \vee \ \left| O^c \right| \le \aleph_0 \right\}$

הוכיחו:

א. המרחב (X,τ) מקיים תכונת האוסדורף ולא מטריזבילי.

ב. קיימת תת קבוצה צפופה $Y \subset X$ כך שתת המרחב Y הוא מטריזבילי.

<u>תשובה</u>

ב) $\mathbb{R}$ תת קבוצה צפופה של X. מ"ל ש $cl(\mathbb{R}) = X$. נניח $cl(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ כי אז בהכרח בשלילה ש $cl(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. מכאן $\mathbb{R}$ סגורה אבל זה אומר ש $\{p\} \in \tau$ וזה כמובן אינו נכון.

קיבלנו ש $\mathbb{R}$ תת קבוצה צפופה של X נוכיח שטופולוגית תת המרחב המושרית על $\mathbb{R}$ היא הדיסקרטית. מ"ל שכל תת קבוצה של $\mathbb{R}$ פתוחה בטופולוגית תת המרחב. אמנם תהי $O \subseteq \mathbb{R}$ אזי $O = O \cap \mathbb{R}$ ומתקיים $p \notin O \in \tau$. מכאן O פתוחה בטופולגית תת המרחב.

קיבלנו ש $\mathbb{R}$ דיסקרטי וכל מרחב דיסקרטי מטריזיבילי.

מש"ל

<u>מבחן 2011, מועד א', שאלה 5</u>

5. נסמן ב, $\Re$ את המספרים הממשיים עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

א. מצא את הסגור, הפנים, והשפה של הקבוצה

$A = [2,5] \cup \{-\frac{3}{n} \mid \ n \in \mathbb{N}\}$ במרחב $\Re_l$

ב. מצא את מרכיב הקשירות של הנקודה $a = 5$ במרחב $\Re_l$

<u>תשובה</u>

א) <u>סגור</u>: נסמן $B = [2,5]$ $C = \left\{ -\frac{3}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ מתקיים

$cl(A) = cl(B \cup C) = cl(B) \cup cl(C)$. אמנם

$B, C \subseteq B \cup C \Rightarrow cl(B), cl(C) \subseteq cl\left(B \cup C\right) \Rightarrow cl(B) \cup cl(C) \subseteq cl\left(B \cup C\right)$.

בכיוון ההפוך- $cl(B)\cup cl(C)$ סגורה, כאיחוד סופי של סגורות, המכילה את $B\cup C$ (כי $\left(B\subseteq cl(B)\right)\wedge\left(C\subseteq cl(C)\right)$) ולכן גם מכילה את הסגור $cl\left(B\cup C\right)$. כעת, $B=\left[2,5\right]$ סגורה ב $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הרגילה ומכיון שטופולוגיית סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה הרגילה של $\mathbb{R}$, אז $B=\left[2,5\right]$ סגורה גם ב R_l. מכאן $cl(B)=B$.

כפי שציינו $\tau\subseteq T$ וכל סגורה לפי τ היא גם סגורה לפי T. $\left\{-\frac{3}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{0\right\}$ סגורה לפי τ שכן מדובר במ"מ וקבוצה במ"מ סגורה אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. מכאן $\left\{-\frac{3}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{0\right\}$ סגורה לפי T ומתקיים $C\subseteq cl(C)\subseteq C\cup\left\{0\right\}$. נראה ש $0\notin cl(C)$ וממילא $C=cl(C)$. $0\notin cl(C)$ כי למשל $\left[0,1\right)$ סביבה של 0 שאינה חותכת את C. לסיכום: $cl(B)=B$, $cl(C)=C$ ומכאן $cl(A)=B\cup C=A$. כלומר הסגור הוא הקבוצה עצמה.

<u>פנים</u>: נראה ש $\text{int}(A)=\left[2,5\right)$ ראשית $\left[2,5\right)$ פתוחה ומוכלת ב A. נראה שהיא פתוחה מקסימלית. תהי $\left[2,5\right)\subset D\subseteq A$. (הסימון: $\subset$ הכלה ממש) ונניח בשלילה ש D פתוחה.

נחלק למקרים:

1. $5\in D$. אזי קיימת U סביבה של 5 כך ש $5\in U\subseteq A$. מהגדרת הטופולוגיה ברור שקיים $\varepsilon>0$ כך ש $\left[5,5+\varepsilon\right)\subseteq U$. נקבל ש $5+\frac{\varepsilon}{2}\in U\setminus A$. סתירה.

2. קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $-\frac{3}{n}\in D$. אזי קיימת U סביבה של $-\frac{3}{n}$ כך ש $-\frac{3}{n}\in U\subseteq A$. מהגדרת הטופולוגיה ברור שקיים $0<\varepsilon<1$ **אי רציונלי** כך ש $\left[-\frac{3}{n},-\frac{3}{n}+\varepsilon\right)\subseteq U$. נקבל ש $-\frac{3}{n}+\frac{\varepsilon}{2}\in U\setminus A$. סתירה.

<u>השפה</u> מוגדרת כ $cl(A)\setminus\text{int}(A)$ ולכן היא שווה ל $\left\{-\frac{3}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{5\right\}$.

ב)נראה שכל תת מרחב בן שתי נקודות אינו קשיר וממילא מרכיב הקשירות הוא $\left\{5\right\}$.

יהי F בעל שני איברים לפחות. נניח $a<b$ שני איברים ב F. מתקיים:

$F=\left(\left(-\infty,b\right)\cap F\right)\cup\left(\left[b,\infty\right)\cap F\right)$. ברור ש $\left(-\infty,b\right)\cap F,\left[b,\infty\right)\cap F$ זרות ולא ריקות,

בקבוצה הימנית נמצא b ובשמאלית a. $(-\infty,b)\in\tau\subseteq T$ ומכאן $(-\infty,b)\cap F$ פתוחה ב F. מתקיים: $[b,\infty)=\bigcup_{b<c}[b,c)$ ולכן $[b,\infty)\in T$ ו $[b,\infty)\cap F$ פתוחה ב F.

הראינו שאם ב F שני איברים לפחות אז הוא אינו קשיר. מכאן מרכיב הקשירות של 5 הוא $\{5\}$.

מש"ל

<u>מבחן 2010, מועד ב', שאלה 4</u>

יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף **אינסופי** של מרחבים טופולוגיים שכל אחד מהם **בן יותר מנקודה אחת**. הראו ש- $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ איננו מרחב דיסקרטי.

<u>תשובה</u>

נניח ש- $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ הוא מרחב דיסקרטי. נבחר $x_\alpha\in X_\alpha$ לכל $\alpha\in I$. אזי $U:=\prod_{\alpha\in I}\{x_\alpha\}$ היא קבוצה פתוחה, כי $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ דיסקרטי. הבסיס של טופולוגית המכפלה הוא קבוצות מהצורה $\prod_{\alpha\in I}O_\alpha$ כאשר $O_\alpha\in\tau_\alpha$ לכל $\alpha\in I$, וגם קיימת קבוצה סופית $J\subseteq I$ כך ש $O_\alpha=X_\alpha$ לכל $\alpha\notin J$. כיוון ש U פתוחה (ואינה ריקה) קיימת $O=\prod_{\alpha\in I}O_\alpha$ קבוצת בסיס כנ"ל שאינה ריקה, כך ש $O\subseteq U$. אם כך, $O_\alpha\subseteq\{x_\alpha\}$ לכל $\alpha\in I$. כיוון ש O אינה ריקה, נקבל $O_\alpha=\{x_\alpha\}$ לכל $\alpha\in I$, אבל $O_\alpha=X_\alpha$ לכל $\alpha\notin J$, ולכן $X_\alpha=\{x_\alpha\}$ לכל $\alpha\notin J$, וקיים α כזה כיוון ש J סופית ו- I אינסופית. זאת בסתירה להנחה שב X_α יש יותר מנקודה אחת לכל $\alpha\in I$.

מש"ל

<u>מבחן 2009, מועד ב', שאלה 3</u>

יהי X מ"ט כלשהו, Y מ"ט האוסדורף. יהיו $f,g:X\to Y$ שתי פונקציות רציפות. הראו שהקבוצה $A=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ היא קבוצה סגורה ב X.

<u>תשובה</u>

לפי טענה, Y מ"ט האוסדורף אם ורק אם האלכסון $\Delta=\{(y,y):y\in Y\}\subseteq Y\times Y$ סגור בטופולוגית המכפלה (יש להוכיח זאת, אך ההוכחה מופיעה בשיעורי הבית). כעת נגדיר $h:X\to Y\times Y$ ע"י $h(x)=(f(x),g(x))$. נשתמש במשפט שאומר h רציפה אם ורק אם ההרכבה עם ההטלות היא רציפה, ואכן $p_1\circ h=f, p_2\circ h=g$ הן רציפות לפי הנתון. לכן $h^{-1}(\Delta)$ היא סגורה כתמונה הפוכה של סגורה. אבל מתקיים $A=h^{-1}(\Delta)$, ולכן A סגורה ב X.

מש"ל

<u>מבחן 2008, מועד ב', שאלה 5</u>

האם קיים הומיאומורפיזם (נמק) :

א. $\{\frac{n+2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ו- $\{\frac{n^2-5}{n+7} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ב. 58 ו- 19.

ג. $B_d((0,0),5)$ ו- $B_d[(0,0),5]$ תת מרחבים $\mathbb{R}^2$ עם המטריקה הסטנדרטית.

ד. $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}$.

<u>תשובה</u>

א. קיים הומיאומורפיזם בין $\{\frac{n+2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ו- $\{\frac{n^2-5}{n+7} \mid n \in \mathbb{N}\}$ שכן מדובר במ"מ דיסקרטים (ניתן להראות שכל נקודון פתוח, או לחלופין להראות שהסדרות המתכנסות הינן קבועות לבסוף. ראו תרגיל דומה שעשינו בתרגול). הם מרחבים מעוצמה $\aleph_0$ ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל בין המרחבים שהיא בהכרח הומיאו' (כי היא ממרחב דיסקרטי למרחב דיסקרטי).

ב. לא קיים הומיאו' בין 58 ו- 19. אחרת, מכיון שבשני המרחבים קיימים 2 מרכיבי קשירות והומיאו' מעביר מרכיב קשירות למרכיב קשירות אזי 1 או 9 אמורים להיות הומיאומורפיים ל8 (כצמצום של הומיאו' על מרכיב הקשירות) אך אף אחד מהם לא הומיאומורפי ל8 שכן ב8 קיימת נקודה אחת בלבד שהוצאתה פוגעת בקשירות (נקודת המרכז המחברת בין 2 המעגלים) בעוד שגם ב9 וגם ב1 יש יותר מנקודה אחת (למעשה אינסוף) שהוצאתה תיצור מרחב לא קשיר.

ג. לא קיים הומיאו' בין $B_d((0,0),5)$ ו- $B_d[(0,0),5]$ שכן $B_d[(0,0),5]$ תת מרחב קומפקטי של $\mathbb{R}^2$ (חסום וסגור) ואילו $B_d((0,0),5)$ לא קומפקטי (אינו סגור ב- $\mathbb{R}^2$) והרי הומיאומורפיזם מעביר מרחב קומפקטי למרחב קומפקטי.

ד. $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}$ אינם הומיאומורפיים שכן הוצאת נקודה מ $\mathbb{R}$ פוגמת בקשירות ואילו אם נוציא נקודה כלשהי מ $\mathbb{R}^2$ נקבל מרחב קשיר מסילתית (כי בין כל 2 נקודות ניתן לחבר מסילה המורכבת משרשור של שתי מסילות סטנדרטיות) ולכן קשיר.

מש"ל

<u>מבחן 2004, מועד א'</u>

על $\mathbb{R}$ נגדיר את יחס השקילות הבא: $x\sim y \Leftrightarrow \sin x=\sin y$. הראו כי $[0,1]\cong {}^{\mathbb{R}}\!/_{\sim}$.

<u>תשובה</u>

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & {[-1,1]} \\ & {}^{\mathbb{R}}\!/_{\sim} \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

נוכיח תחילה כי $[-1,1]\cong {}^{\mathbb{R}}\!/_{\sim}$. אנו מחפשים פונקציה $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ המקיימת $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x\sim y$. המועמד הטבעי הינו $f(x)=\sin x$. נשים לב שזאת פונקצית **על** על הקטע $[-1,1]$.

נשים לב ש-$[-1,1]$ קומפקטי והאוסדורף, אך $\mathbb{R}$ אינו קומפקטי. בגלל ההומיאומורפיזם הרצוי אנו מבינים ש-${}^{\mathbb{R}}\!/_{\sim}$ קומפקטי. נוכיח זאת:

נתבונן בפונקציה $\rho|_{[0,2\pi]}:[0,2\pi]\to {}^{\mathbb{R}}\!/_{\sim}$. זו פונקציה רציפה ועל. $[0,2\pi]$ קומפקטי ולכן ${}^{\mathbb{R}}\!/_{\sim}$ קומפקטי.

כעת, $\hat{f}$ רציפה (מכיוון ש- f רציפה) וחח"ע (בגלל הגדרת יחס השקילות). כמו כן $\hat{f}$ על מכיוון ש- f על. ז"א, בסה"כ, יש לנו פונקציה $\hat{f}$ רציפה והפיכה מקופמקטי להאוסדורף ולכן $\hat{f}$ הומיאומורפיזם. לכן $[-1,1]\cong {}^{\mathbb{R}}\!/_{\sim}$ ומכיוון ש-$[0,1]\cong[-1,1]$ נקבל את הדרוש.

מש"ל

<u>מבחן 2011, מועד ב', שאלה 4</u>

יהי X מרחב T_3. הראה שלכל $x\neq y\in X$ יש קבוצות פתוחות U,V כך ש $x\in U, y\in V$ וכן $\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$

<u>תשובה</u>

<u>טענת עזר</u>

יהי X מרחב T_3. נניח ש- W קבוצה פתוחה ב X ו $x\in W$, אזי קיימת U סביבה פתוחה של x כך ש $x\in U\subseteq\overline{U}\subseteq W$.

<u>הוכחת טענת עזר</u>

מהנתון W^C סגורה וכן $x\notin W^C$. מכיוון שהמרחב T_3 קיימות U,O פתוחות וזרות כך ש $W^C\subseteq O$, $x\in U$. כעת, $U\cap O=\varnothing$, $W^C\subseteq O$, ולכן $U\subseteq O^C\subseteq W$ ומכיון ש O^C סגורה נקבל לבסוף: $x\in U\subseteq\overline{U}\subseteq O^C\subseteq W$.

מש"ל טענת עזר

יהיו $x \neq y \in X$. המרחב X הוא T_3 ולכן הוא T_2 ולכן קיימות W_1, W_2 פתוחות וזרות כך ש-
$x \in W_1,\ y \in W_2$. המרחב X הוא T_3, עפ"י טענת העזר קיימת U סביבה פתוחה של x
המקיימת $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq W_1$ וכן קיימת סביבה פתוחה V של y המקיימת $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W_2$.
מתקיים $W_1 \bigcap W_2 = \varnothing$ ולכן $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

מש"ל

<u>2009, מועד א', שאלה 5</u>

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל ע"י זה שמזהים זו לזו את כל הנקודות $x \in \mathbb{R}$ כך ש $|x| > 1$. בלשון אחרת, X הוא מרחב המנה $\mathbb{R}/\sim$ כאשר $\sim$ הוא יחס שקילות המוגדר באופן הבא: $x \sim y$ אם ורק אם $x = y$ או $|x| \geq 1$ וגם $|y| \geq 1$. הראו ש X הומיאומורפי למעגל $S^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$.

<u>תשובה</u>

תזכורת: הקטע $[0,1]$ כשמזהים בו את הנקודות $0,1$ הומיאומורפי ל S^1 .
נגדיר פונקציה $f : \mathbb{R} \to S^1$ המכבדת את יחס השקילות.
כל הנקודות מחוץ ל- $(-1,1)$ עוברות לאותה נקודה במנה, ולכן נעתיק את $(1,\infty) \cup (-\infty,-1)$ לאותה נקודה כמו $-1,1$.
אנחנו יודעים איך להעתיק את $[0,1]$ ל S^1 ולכן נעתיק את $[-1,1]$ ל $[0,1]$ הומיאומורפית ונרכיב עם ההעתקה הידועה. $h : [-1,1] \to [0,1]$ המוגדרת ע"י $h(x) = \dfrac{x+1}{2}$.
$g : [0,1] \to S^1$ מוגדרת ע"י $g(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.
כעת $f : \mathbb{R} \to S^1$ מוגדרת ע"י

$$f(x) := \begin{cases} (\cos(\pi(x+1)), \sin(\pi(x+1))) & |x| \leq 1 \\ (1,0) & |x| \geq 1 \end{cases}$$

<u>תת-טענה</u>: f רציפה.
<u>תת-הוכחה</u>: נשתמש במשפט שראינו בכיתה: X, Y מ"ט, ויהי $C_1, \dots, C_n$ כיסוי סגור של X, כלומר C_i סגורה עבור $1 \leq i \leq n$, ומתקיים $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. אם $f : X \to Y$ פונקציה כך ש- $f|_{C_i}$ רציפה לכל $1 \leq i \leq n$, אזי f רציפה.
במקרה שלנו, $\{|x| \geq 1\} = [1,\infty) \cup (-\infty,-1], \{|x| \leq 1\} = [-1,1]$ הן סגורות המקיימות את תנאי המשפט, ולכן f רציפה. מש"ל תת-טענה.

<u>סיכום ביניים:</u>

- $f : \mathbb{R} \to S^1$ רציפה ועל
- מתקיים $x \sim y$ אם ורק אם $f(x) = f(y)$

ולכן $\widehat{f} : \mathbb{R}/\sim \to S^1$ מוגדרת היטב וחח"ע.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & S^1 \\ & \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

- f רציפה $\Leftarrow$ $\hat{f}$ רציפה.
- f על $\Leftarrow$ $\hat{f}$ על.

נוכיח כעת ש $\mathbb{R}/\sim$ הוא מרחב קומפקטי: נשים לב שצמצום העתקת המנה $\rho|_{[-1,1]}:[-1,1]\to\mathbb{R}/\sim$ רציפה ועל ממרחב קומפקטי, ולכן גם התמונה $\mathbb{R}/\sim$ קומפקטית.

כעת $\hat{f}$ רציפה מקומפקטי להאוסדורף, ולכן היא העתקה סגורה.

כלומר $\hat{f}$ רציפה, סגורה, חח"ע ועל, ולכן היא הומיאומורפיזם.

מש"ל