

20.10.13
 ג' 2013
 חג 2

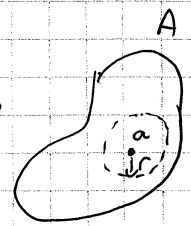
הגדרה: יהי E מרחב נורמטי עבור $x \in E$ ו $r > 0$ נגדרי:

$$B(x, r) = \{y \in E : \|y - x\| < r\}$$

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in E : \|y - x\| \leq r\}$$

השערה: יהי E מרחב נורמטי! $A \subset E$ תת קבוצה של E :

- A נקלחת קבוצה פתוחה אם $a \in A$ קיים $r > 0$ כך $B(a, r) \subset A$
- A נקלחת קבוצה סגורה אם $\{a_n\} \subset A$ סדרת איברי A כך $a_n \rightarrow a$ ו $a \in A$
- או $a \in E \setminus A$ סביבה של a פתוחה



קבוצה פתוחה - אם a קיים ל'סביבה סגורה' סביבה כדורים r שנתנו כלו מתוך A .

פונקציה: תהי f קבוצה סגורה ותחומה \mathbb{R}^n . יהי $C(f)$ מרחב הפונקציות חזירות בה f .

עם הנורמה $\|f\|_\infty = \max_{x \in A} |f(x)|$ תהי $f \in C(f)$ פונקציה קבוצה

הגדלו $A = \{g \in C(f) : g(x) > f(x) \forall x \in A\}$ היא קבוצה פתוחה

שתוכן: נניח $g \in A$ כלשהו $g(x) > f(x)$ $\forall x \in A$, וזכינו ϵ החלפת לקוח

$B(g, \epsilon) \subset A$ $\forall \epsilon > 0$

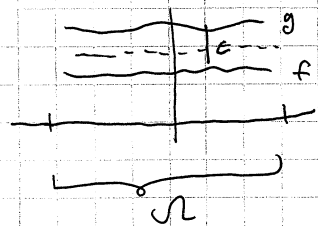
$$B(g, \epsilon) = \{h : \|h - g\|_\infty < \epsilon\} \subset A$$

$$= \{h : \max_{x \in A} |h(x) - g(x)| < \epsilon\} \subset A$$

נרצה לבחור ϵ קטן כן

$g > f$ $\forall x \in A$

הפעם של ϵ סביבה ותחום המכתבין f ו g ממש חיובי. של ϵ נבחר $r = \frac{\epsilon}{2}$ $\forall x \in A$ שמתחת הטקסט של f קטן $\frac{\epsilon}{2}$ תחיה $g > f + \frac{\epsilon}{2}$



20.10.13

מספרים רציונליים
2 תרגילים

בצורה של עקבותיה $F(x) = g(x) - f(x)$ $F(x)$ סדרה

כיוון של סדרה וחסומה אז קיים סדר C כן $F(x) > C$ סדרה

$$[C = F(x_0) = g(x_0) - f(x_0) > 0]$$

תמונה של הסדר

סדרה נכחה $r = \frac{C}{2}$ ונקחה h כלשהי המקיימת $\max_{x \in A} |h(x) - g(x)| < \frac{C}{2}$

$h(x) > f(x)$ סדרה, $h \in A$ ונראה ש ~~$h(x) > f(x)$~~

סדרה צפין סביר גלוי $h(x) - f(x) > 0$

$$h(x) - f(x) = h(x) - g(x) + g(x) - f(x) \geq g(x) - f(x) - |h(x) - g(x)| \geq \frac{C}{2} - \frac{C}{2} = 0 > 0$$

כל נכנסים h ונכנסים g ונכנסים f

$h - g \geq -|h - g|$ h נמצאת בתוך A

דוגמה: בצורה של העתקה \mathbb{Q} סדרה הקבוצה של כל הספרים \mathbb{Q} מספרים ממשיים סתומות:

$$\mathbb{Q} = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_i \in \mathbb{R} \exists M, a_i \leq M, \forall i \geq 1 \}$$

סדרות של מספרים

קיימת מספר M שחוסם את a_i

$$\|a\|_\infty = \sup_{i \geq 1} |a_i|$$

עם העתקה

$$A = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid |a_n| < \frac{1}{n}, \forall n \geq 1 \}$$

סדרה מתחב \mathbb{Q} (שזה לא הקבוצה)

למה A קבוצה סתומה?

סתומה: נוכח ש A סדרה סתומה.

[צריך שכל סדרה בק \mathbb{Q} שכל סדרה בסדרה \mathbb{Q} יהיה נכונה A]

$$\vec{0} = (0, 0, 0, \dots) \in A, B(\vec{0}, r) \subset A, r > 0$$

נניח שיש סדרה $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ כזו ש $B(a, r) \subset A$ ונראה ש $\sup_{n \geq 1} |a_n| < r$ סדרה A המקיימת

למה נקח $a = (\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \dots)$ אז כנראה $\sup_{n \geq 1} |a_n| < r$ $a \in A$

$$a_n = \frac{r}{2} > \frac{1}{n} \text{ אז } \frac{1}{n} < \frac{r}{2}$$