בדידה קל תיכוניסטים שיעור 5

סיימנו את השיעור הקודם בהוכחת המשפט הבא:

משפט: יהי R יח"ש על קבוצה A. אזי:

1. לכל $x\in A$: $[x]\neq\emptyset$
2. לכל $x,y\in A$: $([x]\cap[y]=\emptyset)\vee([x]=[y])$
3. $\bigcup_{[x]\in A/R}[x]=A$

הגדרה: תהי A קבוצה. $\{A_i\}_{i\in I}$ נקראת חלוקה של A אם:

1. לכל $i\in I$ מתקיים: $A_i\neq\emptyset$
2. לכל $i,j\in I$ ($i\neq j$) מתקיים $A_i\cap A_j=\emptyset$
3. $\bigcup_{i\in I}A_i=A$

דוג': $A=\{1,2,3,4,5\}$ דוג' לחלוקה של A:

$A_1=\{1,2\}$

$A_2=\{3,4,5\}$

דוג' נוספת לחלוקה:

$A_1=\{1,3\}$

$A_2=\{5\}$

$A_3=\{2,4\}$

מסקנה: (משפט קודם + הגדרת חלוקה) יהי R יח"ש על קבוצה A. אזי A/R (קבוצת המנה) היא חלוקה של A.

נרצה כעת לבדוק האם גם אפשר הפוך. כלומר, בהינתן חלוקה של A האם אפשר להתאים לה יח"ש על A.

קס"ד

נתחיל עם דוג' נתבונן בקב' $A=\{1,2,3,4\}$

ובחלוקה שלה $A_1=\{1,3\}$
$A_2=\{2,4\}$

נגדיר יחס באופן הבא $\forall a,b\in A:$
$(a,b)\in R \Longleftrightarrow \exists i\in\{1,2\}: a,b\in A_i$

לכן, לדוג'
$(1,3)\in R$ (כי גם "1" וגם "3" שייכים ל-A_1)
$(1,1)\in R$
$(1,2)\notin R$ (כי "1" ב-A_1 אבל "2" ב-A_2 ואין חיתוך בין A_1 ו-A_2).

הסברנו בע"פ (מוזמני- להוכיח לעצמכם)
שאכן R הזה הוא יחש"ק.

[במשפט בע"מ הבא נוכיח ש-R כזה אכן יחש"ק ונוכיח טענה עבור A שרירותית וחלוקה שרירותית שלה.]

מהן מחלקות השקילות?

$[1]=\{a\in A \mid (1,a)\in R\} = \{1,3\}$

כיוון ש- $1\in A_1$
ורק לשם
ולפי היחס שלנו מוגדר להיות שניים ביחס $\Longleftrightarrow$ הם נמצאים באותו A_i.

$[2]=\{a\in A \mid (2,a)\in R\}=\{2,4\}$

כיוון ש- $A=[1]\cup[2]$ אז אין עוד מחלקות שקילות [אכן $[3]=\{1,3\}$ למשל $[1]$]

$A/R=\{[1],[2]\}$

$\Leftarrow$ קיבלנו שמחלקות השקילות הן <u>החלוקה</u> שאיתה התחלנו!!

זה אינו מקרי.

המשפט הבא מראה לנו שמה שראינו בדוגמה כמ"ש קודם יהיה נכון גם אם נשנה את A או את החלוקה:

~~$A = \bigcup_{i \in I} A_i$~~

~~**משפט 5.10** יהא R יחס שקילות על A אזי A/R היא חלוקה של A.~~

~~כעת למצוא קשר גם בכיוון ההפוך ־כלומר בהינתן חלוקה על A נמצא יחס שקילות כך שקבוצת המנה = לחלוקה. למשל עבור $A = \{1,2,3,4\}$ והחלוקה $\{A_1 = \{1,3,4\}, A_2 = \{2\}\}$~~

משפט 5.11 תהא A קבוצה. תהא $\{A_i\}_{i \in I}$ חלוקה של A. אזי

1. נגדיר את היחס המושרה מהחלוקה להיות $R = \bigcup_{i \in I} A_i \times A_i$ (או באופן שקול $xRy \iff \exists i \in I : x, y \in A_i$) אזי R יחס שקילות על A

2. מתקיים $A/R = \{A_i\}_{i \in I}$ כאשר R הוא היחס המושרה מהחלוקה

הוכחה: נוכיח כי R יח"ש. רפלקסיבי: לכל $x \in A$ קיים $i \in I$ כך ש $x \in A_i$ לכן $(x,x) \in A_i \times A_i$ ולכן $(x,x) \in R$. סימטריות: נניח xRy אזי קיים $i \in I$ המקיים $(x,y) \in A_i \times A_i$ ולכן $(y,x) \in A_i \times A_i$ ולכן yRx. טרנזיטיביות: נניח xRy, yRz אזי קיימים $i, j \in I$ כך ש $(x,y) \in A_i \times A_i, (y,z) \in A_j \times A_j$ ואז $y \in A_i \cap A_j$ כיוון שהקבוצות זרות בזוגות נקבל כי $i = j$ ולכן $x, y, z \in A_i$ ולכן $(x,z) \in A_i$ ולכן xRz.
לסעיף השני: יהא $[x] \in A/R$ אזי קיים i יחיד כך ש $x \in A_i$ ולכן $[x] = A_i$. מצד שני לכל i מתקיים כי A_i אינה ריקה ולכן קיים $x \in A_i$ ולכן $[x] = A_i$ ■

למשל $A = \{1,2,3,4\}$ והחלוקה $\{A_1 = \{1,3,4\}, A_2 = \{2\}\}$ היחס המושרה מהחלוקה הוא $R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) = \{(1,1), (1,3), (1,4), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4)\} \cup \{(2,2)\}$ וקבוצת המנה היא $A/R = \{[3] = A_1, [2] = A_2\}$.

תרגיל 5.12 כמה יחסי סדר יש על $A = \{1,2,3,4\}$?

הוכחה: זה שקול לספור חלוקות של A. כמה חלוקות יש עם קבוצה אחת [1] + כמה חלוקות יש עם שתי קבוצות [7] + כמה חלוקות יש עם שלוש קבוצות [6] + כמה חלוקות יש עם 4 קבוצות [1] = סה"כ 15 חלוקות ■

תרגיל 5.13 תהא A קבוצה ו $\sim$ יחס שקילות עליה. נניח שקיימים 4 איברים שונים $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ המקיימים את התכונה הבאה: לכל $x \in A$ קיים i $(1 \le i \le 4)$ כך ש $x \sim a_i$.
מה הגדלים האפשריים לקבוצת המנה $A/\sim$? עבור כל גודל אפשרי, תנו דוגמא בה זה מתקיים.

הוכחה: כל גודל מ־1 עד 4. נימוק: כיוון שכל $x \in A$ מתייחס לאחד מa_1, a_2, a_3, a_4 אזי קבוצת המנה היא $A/\sim = \{[a_1], [a_2], [a_3], [a_4]\}$ וכל השאלה האם רשמנו איברים כפולים (למשל האם $[a_1] = [a_2]$).
דוגמאות: עבור $1 \le i \le 4$ נוכל לקחת את היחס על $\mathbb{N}$ המוגדר להיות מודולו i כלומר היחס $R_i = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 : i \mid n - m\}$ ואז יתקיים כי $\mathbb{N}/R_1 = \{[0]\}, \mathbb{N}/R_2 = \{[0],[1]\}, \mathbb{N}/R_3 = \{[0],[1],[2]\}, \mathbb{N}/R_4 = \{[0],[1],[2],[3]\}$ ■

לא משנה אבל בהרצאה אותם כמובן מציינים עקרונית.

תרגיל 5.14 נגדיר יחס $\sim$ על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ כך $(x,y) \sim (x',y') \iff x + y' = x' + y$. הוכיחו כי $\sim$ יח"ש. מצאו את קבוצת המנה והקשר של ל $\mathbb{Z}$

הוכחה: רפלקסיביות: $(x,y)\sim(x,y)$ כי $x+y=x+y$. סימטריות: אם $(x,y)\sim(x',y')$ אז $x+y'=x'+y$ ולכן $x'+y=x+y'$ ולכן $(x',y')\sim(x,y)$. טרנז': תרגיל. קבוצת המנה

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim = \{[(1,1+a)] : a\in\mathbb{N}\}\cup\{[(1+a,1)] : a\in\mathbb{N}\}\cup\{[(1,1)]\}$$

כלומר כל הפרש בין (x,y) יכול להתקיים והוא שקול לאחד מהנ"ל. ■

5.2 יחסי סדר

הגדרה 5.15 יחס R על קבוצה A יקרא אנטי סימטרי (חלש) אם $\forall a,a'\in A: [(aRa')\wedge(a'Ra)]\Rightarrow a=a'$. כלומר אין שני איברים שונים שמתייחסים זה לזה.

למשל היחס $R=\{(1,2),(2,1)\}$ אינו אנטי סימטרי. היחסים $\emptyset, R=\{(1,2)\}$ יחסים אנטי סימטרים.

הגדרה 5.16 יחס R על קבוצה A יקרא יחס סדר (חלש) אם R הוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי. מינוח: A סדורה חלקית ע"י R, (A,R) קס"ח (קבוצה סדורה חלקית).

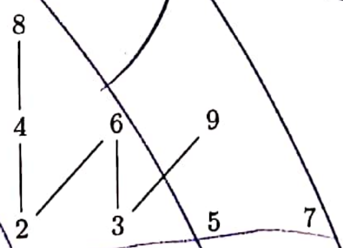
למשל:

- היחס קטן שווה על $A=\{1,2,3\}$ הוא היחס $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$
- היחס "מוכל שווה" על $P(\{1\})$ הוא היחס $R=\{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{1\}),(\{1\},\{1\})\}$

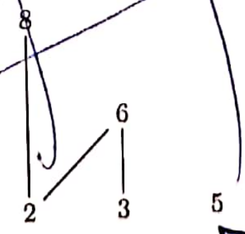
$P\{1,2,3\}$

הערות:

- יחס סדר R ניתן להביע באמצעות דיאגרמת הסה. בדיאגרמת הסה מופיעים כל איברי הקבוצה כאשר x מחובר בקו ל y מעליו הכוונה היא ש xRy. למשל היחס "מחלק את" על הקבוצה $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ניתן להבעה ע"י דיאגרמת הסה



- תהא (A,R) קס"ח ותהא $B\subseteq A$ ת"ק. היחס המורשה על B הוא היחס $R'=R\cap(B\times B)$ ומתקיים כי (B,R') הוא קס"ח. למשל היחס "מחלק את" על הקבוצה $B=\{2,3,5,6,8\}\subseteq\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ניתן להבעה ע"י דיאגרמת הסה



שכאן אתם מוזמנים לצפות בקישור של ההרצאה.

ההרצאה הוקלטה
החל מהפסקה
כמאר הת' 'יחסי סדר'