תרגול מס' 5 - מבנים אלגבריים

5 בדצמבר 2012

תקציר

הומומורפיזם, איזומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם, חבורות מנה, תתי־חבורות, קבוצות יוצרות.

1 קבוצה יוצרת

תזכורת: תהי $H \subseteq G$. חבורה הנוצרת על ידי H היא קבוצת כל המכפלות מהצורה $h_1^{i_1}\dots h_n^{i_n},\ i_k \in \mathbb{Z}$, ומסומנת כ$< H >$.

בהינתן קבוצה יוצרת של חבורה, אחת הדרכים לתאר את החבורה, היא לציין את קבוצת היוצרים של חבורה והיחסים בינהם.

דוגמה: את $\mathbb{Z}_n$ ניתן לתאר על ידי $< a|a^n = id >$ כאשר $a = 1$, והכפל הוא חיבור.

תרגיל: תזכורת - מרחב וקטורי הוא חבורה. נביט $V = \mathbb{R}^2$. נביט ב $H = \{(0,1),(1,0)\}$. מצא את התת־חבורה שנוצרת על ידי H.

פתרון: נשים לב שמדובר בסכומים סופיים של $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$. אלה הם בדיוק האיברים $(k,m),\ k,m \in \mathbb{Z}$. נשים לב - שאם נסמן $a = (1,0),\ b = (0,1)$, ו"נשכח" שהכפל הוא חיבור, אפשר לתאר את החבורה כחבורה שנוצרת על ידי a,b אם יחס יחיד בינהם $ab = ba$. זהו מאפשר לנו לרשום כל איבר בחבורה כ $a^i b^j,\ i,j \in \mathbb{Z}$. $ab = ba$ הוא היחס היחיד, מכיוון שאחרת היינו מוצאים i,j,k,l כך ש $a^i b^j = a^k b^l$ כאשר $i \neq k$ או $j \neq l$.

הגדרה 1.1 יהי P מצולע משוכלל, $V = \{v_1,\dots,v_n\}$ קבוצת הקודקודים שלו ו $E = \{v_1v_2,\dots,v_{n-1}v_n,v_nv_1\}$ קבוצת הצלעות שלו. קל לראות שחבורת כל הפונ' החח"ע ועל מ־V אל עצמה היא בעצם S_n בשינוי אדרת. נתבונן רק בפונקציות f החח"ע שמקיימות את התנאי הבא: אם יש צלע בין v_i,v_j אז ישנה צלע גם בין $f(v_i)$ ו $f(v_j)$. ז"א, אם $f(v_i) = v_k$, אזי $f(v_{i+1}) = v_{k\pm1}$, ו $f(v_{i-1}) = v_{k\pm1}$ (החיבור של האינדקסים הוא מודולו n). נשים לב שקבוצת הפונקציות האלה היא חבורה (תרגיל קל לבדוק בעצמים).חבורה זו נקראת חבורה דיהדרלית ומסומנת ב D_n. נשים לב שגודל החבורה הוא $2n$. נראה את זה באופן הבא. לכל $f \in D_n$ יש n אפשרויות להעביר את v_1 לקודקוד אחר. לאחר מכן, יש לנו 2 אפשרויות לקבוע את מיקומו של v_2. העתקה נקבעת באופן יחיד על ידי 2 פעולות האלה, ויש לנו $2n$ אפשרויות לעשות את זה.

יוצרים: נמצא עכשיו קבוצה יוצרת של D_n. נגדיר את הסיבוב r להיות העתקה הבאה. $v_1 \mapsto v_2, \ldots, v_n \mapsto v_1$. שיקוף s ניתן להגדיר באופן הבא. אנו נשקף את המצולע ביחס לחוצה זווית שיוצא מv_1. ניתן לראות שזו היא העתקה בD_n. אנו נראה כי סיבוב r ושיקוף כלשהו s יוצרים את החבורה. נשים לב $r^n = id$, $s^2 = id$, וגם מתקיים $srs = r^{-1}$. לכן, כל איבר בחבורה ניתן שנוצרת על ידיהם ניתן לרשום ב על ידי $s^i r^d, i = 0, 1; d = 0, 1, \ldots, n-1$. נשים לב שלכל אפשרות כזו, העתקה שמתקבלת היא שונה, לכן יש לנו $2n$ העתקות שונות בחבורה. לכן $< r, s >= D_{2n}$. בשפה של יוצרים ויחסים $\langle r, s | r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$.

דוגמא: באופן דומה, (בעצם דוגמא פרטית) אפשר לבדוק ש S_3 נוצרת על ידי (123)ו (12).

הגדרה 1.2 חבורת קווטרניונים. נגדיר את חבורת קווטרניונים באופן הבא:

האיברים של החבורה הם $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$. הכפל מוגדר באופן הבא: $\pm 1 \cdot a = \pm a$. $i^2 = j^2 = -1$, $ij = k, ji = -k$. המשך טבלת הכפל נובע מהיחסים הללו. ניתן לתאר אותה על ידי יוצרים ויחסים הבאים. היוצרים הם $-1, i, j$. היחסים הם $i^2 = j^2 = -1, (-1)^2 = id, ij = -ji$.

דוגמא: נמצא קבוצה יוצרת של A_4. בסוף התרגיל נראה שסדר של A_4 הוא 12. (הייתם צריכים לחשב את זה בתרגיל בית).

טענה:

$$\{\sigma = (12)(34),\ \tau = (13)(24),\ \rho = (123)\}$$

היא קבוצה יוצרת של A_4. נוכיח זאת באופן הבא: ראשית - נשים לב ש τ ו σ מתחלפים ביניהם. בנוסף $\sigma^2 = \tau^2 = \rho^3 = id$. נחשב

$$\rho^{-1}\sigma\rho = (132)(12)(34)(123) = (13)(24) = \tau$$

זאת אומרת ש $\sigma\rho = \rho\tau$. בנוסף, $\rho\sigma\rho^{-1} = (123)(12)(34)(132) = (14)(23) = \sigma\tau$. לכן $\sigma\tau\rho = \rho\sigma$. מכאן אפשר להסיק

$$\rho^{-1}\tau\rho = \rho^{-1}\left(\rho^{-1}\sigma\rho\right)\rho = \rho^{-2}\sigma\rho^2 = \rho\sigma\rho^{-1} = \sigma\tau$$

לכן $\tau\rho = \rho\sigma\tau$. בסך הכל מצאנו כי ניתן להעביר מימין ל-ρ הן את σ והן את τ. לפיכך אנו יכולים לבטא כל איבר בצורה $\rho^i\zeta$ כאשר $\zeta \in \langle\sigma, \tau\rangle$. מכיוון ש-$\rho$ מסדר 3, ניתן להגביל את $i = 0, 1, 2$. חישוב יראה ש-$\langle\sigma, \tau\rangle = \{id, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$, חבורה של זוגות חילופים זרים. אי-לכך, אנו מצאנו כי כל איבר בחבורה ניתן להצגה על ידי $\rho^i\sigma^j\tau^k$ כאשר $i \in \{0, 1, 2\}$, $j, k \in \{0, 1\}$. נראה שהביטויים הללו קובעים את התמורה באופן יחיד. נניח ש $\rho^{i_2}\zeta_2 = \rho^{i_1}\zeta_1$. אזי $\rho^{i_1 - i_2} = \zeta_1\zeta_2$. קיבלנו, שחזקה של מחזור מאורך 3 שווה למכפלה של 2 חילופים זרים. זה ייתכן אם ורק אם שני הצדדים שווים לזהות, דהיינו $i_1 = i_2$ ו $\zeta_1 = \zeta_2$. יש לנו 12 אפשרויות כאלה, לכן σ, τ, ρ יוצרים את A_4.

2 הומומורפיזם

הגדרה 2.1 תהיינה G, H חבורות. פונקציה $\phi : G \mapsto H$ שמקיימת $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$ נקראת הומומורפיזם של חבורות.

דוגמא: $\phi:\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{Z}_n$ המוגדר על ידי $z\mapsto[z]$ הוא הומומורפיזם.

דוגמא: $\det:GL_n(k)\mapsto k^*$ הוא הומומורפיזם.

דוגמא: יהי Vמרחב וקטורי. כל העתקה לינארית T היא הומומורפיזם של חבורות.

דוגמא: $\phi:S_n\mapsto\{-1,1\}$ המוגדר על ידי $\sigma\mapsto sign(\sigma)$ היא הומומורפיזם.

תרגיל: יהי $\phi:G\mapsto H$ הומומורפיזם. הוכח, לכל $g\in H$, $\phi(g)^{-1}=\phi(g^{-1})$.

פתרון:

$$\phi\left(1_G\right)=\phi\left(gg^{-1}\right)=\phi(g)\phi\left(g^{-1}\right)=1_H\implies\phi(g)^{-1}=\phi\left(g^{-1}\right)$$

ניתן לבדוק באינדוקציה ש $\phi(g^n)=\phi(g^n)$.

מסקנה 2.2 יהי $\phi:G\mapsto H$ הומומורפיזם, Γ קבוצה יוצרת של G. אזי $\phi(\Gamma)$ היא הקבוצה היוצרת של $Im\phi$ וכל ϕ נקבעת באופן יחיד על ידי התמונה של Γ.

דוגמא: תהי G חבורה ציקלית שנוצרת על ידי ϕ. אזי כל הומומורפיזם ϕ מ G נקבע על ידי $\phi(g)$, מכיוון שכל איבר ב G הוא מהצורה g^n לכן מתקיים $\phi(g^n)=\phi\left(g\right)^n$.

הערה 2.3 זה מאד דומה להעתקות לינאריות, כשהעתקה לינארית נקבעת באופן יחיד על ידי התמונה של הבסיס. בהמשך נראה שהעתקות לינאריות הן דוגמא למעשה להומומורפיזם. כאשר מדובר בהומומורפיזם, יש לשים לב שלא כל קביעה של תמונה של יוצר נותנת לנו הומומורפיזם. למשל $\phi:\mathbb{Z}_n\mapsto\mathbb{Z}$ המוגדר על ידי $[1]\mapsto 1$ אינה מגדירה הומומורפיזם, מכיוון שמצד אחד $\phi([n])=\phi([1]+\cdots+[1])=n$, ומצד שני $\phi([n])=0$. באופן כללי, יש לבדוק שכל היחסים שמתקיימים על היוצרים מתקיימים גם על התמונות של היוצרים.

הגדרה 2.4 יהי $\phi:G\mapsto H$ הומומורפיזם. קבוצת כל האיברים $g\in G$ כך $\phi(g)=1_H$נקרא גרעין (kernel) של ϕ ומסומן $\ker\phi$. קבוצת כל $h\in H$ שעבורם קיים $g\in G$ כך ש $\phi(g)=h$ נקראת תמונה של ϕ(image) ומסומן ב $Im\phi$.

תרגיל: מצא את $\ker$ בכל אחת מהדוגמאות הקודמות.

משפט 2.5 $\ker\phi$היא תת־חבורה של G. $Im\phi$ היא תת־חבורה של H. בעצם $\ker\phi$ היא תת־חבורה נורמלית של G.

הערה 2.6 אם תזכרו בקורס בלינארית, כבר ראיתם את המושגים גרעין ותמונה. כל העתקה לינארית בין מרחבים וקרטוריים הינה הומומורפיזם של חבורות, (שימו לב במרחב וקטורי יחד עם פעולת חיבור עליו הוא חבורה).

הגדרה 2.7 יהי $\phi:G\mapsto H$ הומומורפיזם חח"ע נקרא שיכון או מונומורפיזם. המשמעות האינטואיטיבית ש H מכילה עותק של G כתת־חבורה שלה.

דוגמא: $\phi:(\mathbb{Z}_2,+)\mapsto(\mathbb{C}^*,\cdot)$המוגדר על ידי $0\mapsto 1$, $1\mapsto -1$ הוא מונומורפיזם.

טענה 2.8 יהי $\phi : G \mapsto H$ הומומורפיזם של חבורות. אזי ϕ הוא מונורפיזם אם ורק אם $ker\phi = \{1_G\}$ (אומרים שהגרעין הוא טריוויאלי).

הוכחה: נניח ש ϕ מונומורפיזם. אזי מחח"ע של הפונקציה נובע ש $x = 1_G \Leftrightarrow \phi(x) = \phi(1_g) = 1_H$. עכשיו, נניח ש $\ker\phi = \{1_G\}$. נניח ש $\phi(a) = \phi(b)$, אזי $\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)^{-1} = 1_H$. לכן $a = b \Leftarrow ab^{-1} = 1_G$. ■

תרגיל: יהי ρשורש יחידה מסדר n. ($\rho = cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)$) העתקה מ$\mathbb{Z}_n$ אל $\mathbb{C}^*$ המוגדרת על ידי $\phi([m]) = \rho^m$ היא שיכון.

פתרון: קודם כל חשוב להראות שהעתקה מוגדרת היטב. זאת אומרת, שהיא אינה תלוייה בבחירת נציג של מחלקת שקילות. דהיינו, שלכל $k \equiv m \mod n$ מתקיים $\rho^k = \rho^m$. מכיוון ש $m \equiv k \mod k$, קיימים $b \in \mathbb{Z}$ כך ש $k = m + bn$. אזי

$$\begin{aligned}\rho^m &= cis(\frac{2\pi m}{n}) = 1 \cdot cis\left(\frac{2\pi m}{n}\right) = cis\left(\frac{2\pi bn}{n}\right) cis\left(\frac{2\pi m}{n}\right) = \\ &= cis\left(\frac{2\pi bn + 2\pi m}{n}\right) = cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \rho^k\end{aligned}$$

עכשיו נראה, ש ϕ היא הומומורפיזם חח"ע. נשים לב, לכל $m \in \mathbb{Z}$ מתקיים, $\rho^m = \rho^{m \mod n}$ (כאשר $m \mod n$ היא שארית של חילוק m ב n).

$$\phi([m+k]) = \rho^{m+k} = \rho^m \rho^k = \phi([m]) \cdot \phi([k])$$

נוכיח שהפונ' חח"ע. נניח ש $\phi([k]) = \rho^k = \rho^m = \phi([m])$. $\rho^{k-m} = 1$. מכיוון שהסדר של ρ הוא n, $n|k-m$. לכן $[m] = [k]$. לכן ϕמונומורפיזם.

תרגיל: (משפט קיילי) תהי G חבורה. הוכח כי קיים מונומורפיזם $G \mapsto S_G$.

פתרון: נשים לב, כי לכל $g \in G$, מוגדרת פונקציה חד־חד ערכית ועל f_g המוגדרת על ידי $a \mapsto ga$. אנו נראה $\phi : G \mapsto S_G$ המוגדרת על ידי $g \mapsto f_g$. אנו נראה שזה אכן הומומומורפיזם. על מנת לעשות את זה, יש להראות כי לכל $g, h \in G$, $f_g \circ f_h = f_{gh}$. פונקציות הן שוות, אם ורק אם לכל $a \in G$ מתקיים, $(f_g \circ f_h)(a) = f_{gh}(a)$. מתקיים:

$$(f_g \circ f_h)(a) = f_g(f_h(a)) = f_g(ha) = gha = f_{gh}(a)$$

הפונקציות שוות וקיבלנו הומומורפיזם. עכשיו צריך להראות כי הוא חד־חד ערכי. נניח ש $f_g = f_h$. אזי מתקיים

$$h = h \cdot 1_G = f_h(1_G) = f_g(1_G) = g \cdot 1_G = g$$

לכן ϕהיא חח"ע ■.

הגדרה 2.9 יהי $\phi : G \mapsto H$ הומומורפיזם. אם ϕ על אנו אומרים ש ϕאפימורפיזם.

תרגיל: יהי $\phi : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_n$ המוגדר על ידי $\phi(z) = [z]$. הוכח כי ϕ אפימורפיזם.

פתרון: מתקיים $\phi(a+b) = [a+b] = [a] + [b] = \phi(a) + \phi(b)$, לכן ϕ הוא הומומורפיזם. ϕ על, כי לכל מחלקה, קיים נציג.

תרגיל: הראה כי $\det : GL_n(\mathbb{F}) \mapsto \mathbb{F}$ אפימורפיזם.

פתרון: הראנו שזהו הומומורפיזם. נותר להראות כי הוא על. ניקח מטריצה אלכסונית שהרכיב הראשון שלה הוא איבר הדרוש ב $\mathbb{F}$, a, ו 1בשאר המקומות. דטרמיננטה של המטריצה הנ"ל היא a.

הגדרה 2.10 יהי $\phi : G \mapsto H$ הומומורפיזם. אם ϕ חח"ע ועל אנו אומרים ש ϕ איזומורפיזם. מבחינתינו זה אומר שכל מה שאנו אומרים של G תקף גם ל H, ולהיפך. בעצם מדובר ב"אותה חבורה" שלאיברים בה ניתנו שמות אחרים.

תרגיל: כל תתי־חבורות ציקליות מאותו סדר איזומורפיות זו לזו.

פתרון: תהיינה $G = \langle g \rangle$ ו $H = \langle h \rangle$ חבורות ציקליות בעלות אותו סדר. אזי $g^k \mapsto h^k$ הוא הומומורפיזם חח"ע ועל. נראה כי היא הומומורפיזם. ראשית, נשים לב שמתקיים לכל m, k, $h^k h^n = h^{k+m \mod n}$, $g^k g^m = g^{k+m \mod n}$. לכן

$$\phi(g^k)\phi(g^m) = h^k h^m = h^{k+m \mod n} = \phi(g^{k+m \mod n}) = \phi(g^k g^m)$$

הערה: $k \mod n$ הוא פעולת לקיחת השארית של חילוק k ב n.

תרגיל: כל שתי חבורות מסדר p, כאשר p ראשוני, הן איזומורפיות.

פתרון: יהי p ראשוני, תהיינה G ו H חבורות מסדר p. ראשית, נשים לב G ו H הן ציקליות, לפי משפט להגרנז'. יהי $1_G \neq g \in G$. מתקיים $1 \neq |\langle g \rangle|$, וגם $p||\langle g \rangle|$ לפי משפט לה־גראנז'. לכן $p = |\langle g \rangle|$, ז"א $G =< g >$. באופן דומה מראים ש H ציקלית. יש לנו 2 חבורות ציקליות מסדר p ולכן, על פי התרגיל הקודם הן איזומורפיות.

הגדרה 2.11 איזומורפיזם מחבורה אל עצמה נקרא אוטומורפיזם.

דוגמא: תהי G חבורה אבלית. אזי $g \mapsto g^{-1}$ הוא אוטומורפיזם.

תרגיל: תהי G חבורה. לכל $g \in G$, $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ הוא אוטומורפיזם.

פתרון: נראה ש ϕ_g הומומורפיזם. מתקיים $\phi_g(x)\phi_g(y) = \left(gxg^{-1}\right)\left(gyg^{-1}\right) = gxyg^{-1} = \phi_g(xy)$. נראה ש ϕ_g הפיכה. מתקיים $\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = \phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = id$. לכן ϕ_g איזומורפיזם.

3 תת־חבורה נורמלית ומנות

הגדרה 3.1 תהי G חבורה, $N \leq G$ תת־חבורה שלה. אנו אומרים ש N נורמלית אם ורק אם לכל $g \in G$ מתקיים $gN = Ng$ או באופן שקול $gNg^{-1} = N$. אנו נסמן ת"ח נורמלית ב $N \trianglelefteq G$.

דוגמא: כל תת־חבורה של תת־חבורה אבלית היא נורמלית. עם $(G, +)$ היא חבורה אבלית, לכל $g \in G$, $H \leq G$ מתקיים $g + H = H + g$. (מכיוון ש לכל $h \in H$ מתקיים $g + h = h + g$).

תרגיל: תהי $N \leq G$, ונניח שלכל $g \in G$, ולכל $n \in N$ מתקיים $gng^{-1} \in N$. אזי N נורמלית.

פתרון: הראנו: $gNg^{-1} \subset N$. עלינו להראות $N \subset gNg^{-1}$. יהי $n \in N$. על פי ההנחה, $g^{-1}ng \in N$, לכן $n = g(g^{-1}ng)g^{-1} \in gNg^{-1}$.

תרגיל: הוכח $SL_n(\mathbb{F})$ היא תת־חבורה נורמלית של $GL_n(\mathbb{F})$.

פתרון: עלינו להראות שלכל $a \in GL_n(\mathbb{F})$ מתקיים $aSL_n(\mathbb{F})a^{-1} = SL_n(F)$. מספיק, לפי התרגיל הקודם להראות $aSL_n(\mathbb{F})a^{-1} \subseteq SL_n(\mathbb{F})$. יהי $s \in SL_n(\mathbb{F})$. לכל $a \in GL_n(\mathbb{F})$ מתקיים:

$$\det\left(asa^{-1}\right) = \det\left(a\right)\det\left(s\right)\det\left(a^{-1}\right) = \det(s) = 1$$

לכן, $aSL_n(\mathbb{F})a^{-1} \subset SL_n(\mathbb{F})$. לכן, לפי התרגיל הקודם יש שוויון.

תרגיל: תהי $H \leq G$ כך ש $[G : H] = 2$. הוכח: G תת־חבורה נורמלית.

פתרון: יהי $g \in G$. אם $g \in H$, אזי $gH = H = Hg$. אחרת, אם $g \notin H$, $gH = H^c = Hg$. לכן לכל $g \in H$, מתקיים $gH = Hg$, לכן H נורמלית.

תרגיל: הוכח A_n היא תת־חבורה נורמלית של S_n.

פתרון: A_n היא קבוצה של כל התמורות הזוגיות. אנו נבנה פונקציה מתמורות הזוגיות אל התמורות האי־זוגיות באופן הבא: נקבע חילוף ב S_n, בה"כ $\tau = (12)$ (אבל מן הסתם כל חילוף עובד). לכל תמורה $\sigma \in S_n$ מתקיים $sign(\sigma) = -sign(\tau\sigma)$. כמו כן $\sigma \mapsto \tau\sigma$ היא העתקה חח"ע ועל. לכן מספר התמורות הזוגיות והאי־זוגיות שווה. לכן אינדקס של A_n ב S_n הוא 2. על פי התרגיל הקודם A_n נורמלית.

תרגיל: יהי $p > 0$, תהי G חבורה לא אבלית מסדר $2p$. הוכח, קיימת ב G תת־חבורה מסדר p נורמלית.

פתרון: לכל איבר בG הסדר האפשרי הינו $1, 2, p, 2p$ על פי משפט לה־גרנז'. אם קיים איבר מסדר $2p$ אזי היא ציקלית ולכן אבלית ־ סתירה. אם סדר של כל איבר הוא 2, אזי היא אבלית (לפי אחד מתרגילי בית שעשיתם). לכן קיים איבר מסדר p. נסמן אותו ב g. מתקיים $[G : \langle g\rangle] = 2$, לכן $\langle g\rangle$ נורמלית.

תרגיל: תהי G חבורה, ונניח שכל תת־חבורה של G היא נורמלית. הוכח / הפרך G אבלית.

פתרון: נפריך את הטענה על ידי דוגמה נגדית. נתבונן בחבורת הקווטרניונים Q. תת־חבורה יחידה מסדר 2 היא $\{\pm 1\}$ ומכיוון שכל איבר בה מתחלף עם כל איבר בחבורה ־ היא נורמלית. כל תת־חבורה לא טריוויאלית (כלמר ששונה מ $Q, \{1\}$ היא מסדר 4, ומכיוון שהאינדקס שלה הוא 2, היא בהכרח נורמלית. אבל Q אינה אבלית.

הגדרה 3.2 תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$ תת־חבורה של G. אוסף כל הקוסטים של N בתוך G מסומן G/N. יחד עם הפעולה $gN * hN \mapsto ghN$, היא חבורה.

דוגמא: חבורת המנה של $n\mathbb{Z}$ ב $\mathbb{Z}$ היא $\mathbb{Z}_n$.

תרגיל: לאיזו חבורה איזומרפית S_n/A_n?

פתרון: מכיוון שהאינדקס של A_n ב S_n הוא 2, $|{}^{S_n}/{}_{A_n}| = 2$. החבורה היחידה מסדר 2 היא $\mathbb{Z}_2$.

הערה 3.3 על מנת להראות שזו חבורה עליכם להראות שהכפל מוגדר היטב - כלמר אינו תלוי בבחירת הנציגים, ושאכן יש לנו אסוציאטיביות, איבר הופכי ויחידה. זאת תעשו בהרצאה.

אם רוצים להראות שתת־חבורה היא נורמלית יש 2 דרכים - אחת לעשות זאת באופן ישיר. שניה - לבנות הומומורפיזם כלשהו ולהראות שהחבורה הנתונה היא גרעין של העתקה.