חשבון אינפיניטסימלי 3 - תרגול 5

1 דיפרנציאביליות ונגזרות חלקיות - הגדרות.

בהמשך, אם לא נאמר אחרת, נניח, ש $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ו $a \in E$.

הגדרה 1.1. תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, תהי $f : E \to \mathbb{R}^m$, ותהי $a \in E$. נאמר, ש f דיפרנציאבילית ב a אם קיימת העתקה לינארית $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים

$$F(a+v) = F(a) + L(v) + o(v)$$

כאשר $o(v)$ היא פונקציה שמקיימת

$$\lim_{v \to 0} \frac{o(v)}{\|v\|} = 0$$

או באופן שקול

$$\lim_{v \to 0} b \frac{F(a+v) - F(a) - L(v)}{\|v\|} = 0$$

ההעתקה הלינארית L נקראת הדיפרנציאל של f ב a ומסמנים $D_f(a)$

משפט 1.2. אם $f : E \to \mathbb{R}^m$ היא פונקציה דיפרנציאבילית ב a, אזי f רציפה ב a.

משפט 1.3. הפונקציה $f : E \to \mathbb{R}^m$ היא פונקציה דיפרנציאבילית ב a, אזי היא דיפרנציאבילית רכיב-רכיב. במילים אחרות, אם נסמן

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

אזי, לכל $1 \leq i \leq m$, f_i דיפרנציאבילית ב a.

הגדרה 1.4. תהי $f : E \to \mathbb{R}^m$ ו $a \in E$. יהי $\{e_1, \ldots, e_n\}_n$ הבסיס הסטנדרטי ל $\mathbb{R}^n$, המוגדר על ידי

$$.e_i(k) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

(כלמר, 1 במקום ה i ו 0 בשאר המקומות. הנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ מוגדרת על ידי

$$.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

באופן שקול, אפשר לרשום

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)=\lim_{x_i\to0}\frac{f\left(a_1,\ldots,a_i+x_i,\ldots a_n\right)-f\left(a_1,\ldots,a_n\right)}{x_i}$$

משפט 1.5. אם f דיפרנציאבילית ב a, אזי הנגזרות החלקיות קיימות ב a.

משפט 1.6. אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית, אזי העתקה L שמקיימת

$$f\left(a+v\right)=f\left(a\right)+L\left(v\right)+o\left(v\right)$$

היא יחידה, ומתקיים

$$D_f\left(a\right)\left(v\right)=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right).$$

הערה 1.7. שימו לב, $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)$ הוא בד"כ וקטור עמודות:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(a\right)\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\left(a\right)\end{pmatrix}$$

ו

$$\begin{aligned}D_f\left(a\right)\left(v\right)&=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)=\\&=v_1\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(a\right)\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\left(a\right)\end{pmatrix}+\ldots v_n\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(a\right)\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\left(a\right)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(a\right)&\ldots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(a\right)\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\left(a\right)&\ldots&\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\left(a\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

הגדרה 1.8. המטריצה

$$\nabla f\left(a\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(a\right)&\ldots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(a\right)\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\left(a\right)&\ldots&\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\left(a\right)\end{pmatrix}$$

נקראת מטריצת יעקובי של f ב a או הגרדיאנט של f ב a.

הערה 1.9. קיים נגזרות חלקיות לא גורר דיפרנציאביליות.

משפט 1.10. (תנאי מספיק לדיפרנציאביליות). אם הנגזרות החלקיות של f קיימות ב a ורציפות בסביבה של a, אזי f דיפרנצאיבילית ב a.

הגדרה 1.11. יהי $v \in \mathbb{R}^n$. הנגזרת הכיוונית של f ביחס ל a מוגדרת על ידי

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\partial f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

משפט 1.12. אם f דיפרנציאבילית ב a, לכל $v \in \mathbb{R}^n$, הנגזרת הכיוונית

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

ומתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = D_f(a)\, v.$$

2 תרגילים

שלבים בבדיקת דיפרנציאביליות:

1. קודם כל, יש לבדוק האם f רציפה ב a. אם f אינה רציפה, אז אינה דיפרנציאבילית.
2. יש לבדוק אם הנגזרות החלקיות קיימות ב a. אם לא קיימות, אז אינה דיפרנציאבילית.
3. יש לבדוק האם הנגזרות החלקיות רציפות בסביבה של a. אם כן - הפונקציה דיפרנציאבילית. אחרת (או אם קשה לבדוק רציפות מהר) יש לבדוק על פי ההגדרה: כלמר האם

$$\lim_{v \to (0,0)} \frac{f(a+v) - f(a) - \nabla f(a)\, v}{\|v\|} = 0.$$

תרגיל 2.1. (ממבחן). תהי

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. מצאו את $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ואת $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
2. האם f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

פתרון.

1. נחשב את הנגזרות החלקיות על פי ההגדרה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{x^2}-0}{x} = 1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^4}{y^2}-0}{y} = \lim_{y\to 0} y = 0\end{aligned}$$

2. תחילה, נבדוק אם f רציפה ב $(0,0)$. על מנת ש f תהיה רציפה, חייב להתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} = 0$$

או באופן שקול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right|.$$

על פי סנדוויץ' נקבל:

$$\begin{aligned}0 &\le \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right|\\ &\le \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right|\right)\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right|\\ &\ge \lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|+\lim|y| = 0\end{aligned}$$

בדוק האם מתקיים

$$\lim_{(h,k)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-D_f(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

מתקיים $D_f(0,0)=(1,0)$ ולכן

$$D_f(0,0)(h,k) = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix} = h$$

נציב ונחשב את הגבול:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+k^4}{\sqrt{h^2+y^2}}-h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3+k^4-h\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2}$$

נשים לב, אם נתקרב ל $(0,0)$ לאורך הישר $h=0$ נקבל

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3+k^4-h\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2} =$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{k^4}{k^2} = 0$$

ואם נתקרב לאורך הישר $k=0$ נקבל

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3+k^4-h\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^3+h^2}{h^2} = 1$$

הגבולות שונים ולכן אין גבול, כלמר f אינה דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

תרגיל 2.2. (ממבחן) תהי

$$.f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{z\sin xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

1. מצאו את $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ב $(0,0,0)$.
2. האם דיפרנציאבילית ב $(0,0,0)$.

פתרון.

1. נגזור על פי ההגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y,0)-f(0,0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = \lim_{z\to 0}\frac{f(0,0,z)-f(0,0,0)}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{0-0}{z} = 0$$

2. שוב, נבדוק על פי הגדרה, כלמר האם מתקיים:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-\nabla f(0,0,0)(x,y,z)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} =$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\frac{z\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\frac{1}{3}}}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\frac{4}{3}}} = 0$$

נעבור לקואורדינטות כדוריות ונחשב את הגבול של הביטוי בערך מוחלט.

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left|\frac{z\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\frac{4}{3}}}\right| =$$

$$\lim_{r\to0} \left|\frac{r\cos\phi\sin\left(r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\right)}{r^{\frac{4}{3}}}\right| \le$$

$$\lim_{r\to0} \left|\frac{r\sin\left(r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\theta\right)}{r^{\frac{4}{3}}}\right| \le$$

$$\lim_{r\to0} \left|\frac{r\sin r^2}{r^{\frac{4}{3}}}\right| \le$$

$$\lim_{r\to0} \left|\frac{r^3}{r^{\frac{4}{3}}}\right| = 0$$

לכן הפונקציה היא דיפרנציאבילית והגול קיים.

תרגיל 2.3. תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$. נגדיר:

$$.h(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & xy>0 \\ 0 & xy\le 0 \end{cases}$$

הוכח כי אם מתקיים $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)$ אזי $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ אזי $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

פתרון. קודם, כל - נבדוק ש h רציפה ב $(0,0)$. נשים לב, ש $|h(x,y)|\le|f(x,y)|$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. נרצה להוכיח ש

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = h(0,0)$$

או באופן שקול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |h(x,y)-h(0,0)| = 0$$

$$
\begin{aligned}
0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| h(x,y) - h(0,0) \right| &= \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| h(x,y) \right| &\le \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| f(x,y) \right| &= 0
\end{aligned}
$$

על פי הנתון.

נבדוק אם הנגזרות החלקיות קיימות:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x,0) - h(0,0)}{x} &= \\
\lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} &= 0 \\
\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{h(0,y) - h(0,0)}{y} &= \\
\lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} &= 0
\end{aligned}
$$

עכשיו, צריך לבדוק האם מתקיים:

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y) - h(0,0) - \nabla h(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0
$$

שוב, נראה שהערך המוחלט של הביטוי מתאפס.

$$
\begin{aligned}
0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{h(x,y) - h(0,0) - \nabla h(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| &= \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{h(x,y) - 0 - \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| &= \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{h(x,y) - 0\cdot x - 0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| &= \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{h(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| &\le \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| &= \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{f(x,y) - 0 - 0\cdot x - 0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| &= \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| &= 0
\end{aligned}
$$

השוויון האחרון ברור מפני ש f דיפרנציאבילית ב 0.