89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 4

שיטות הוכחה

אסטרטגיות הוכחה

מספר אסטרטגיה	אסטרטגית ההוכחה
1	על מנת להוכיח טענה מהצורה $q \Rightarrow p$, נניח ש p נכון ונוכיח ש q נכון.
2	על מנת להוכיח טענה מהצורה $q \Rightarrow p$, נניח ש $\neg q$ נכון ונוכיח ש $\neg p$ נכון.
3	על מנת להוכיח טענה מהצורה $\neg p$, ננסח מחדש את $\neg p$ בצורה נוחה יותר, ונשתמש באסטרטגיות מתאימות לצורה זו.
4	על מנת להוכיח טענה מהצורה $\neg p$, נניח ש p נכון ונגיע לסתירה.
5	על מנת להשתמש בנתון $\neg p$ ולהגיע לסתירה, נניח ש $\neg p$ נכון ונוכיח ש p נכון.
6	על מנת להשתמש בנתון $\neg p$, ננסח אותו מחדש בצורה נוחה יותר.
7	על מנת להשתמש בנתון $q \Rightarrow p$, ננסה להוסיף את p להנחות ונסיק את q, או שננסה להוסיף את $\neg q$ להנחות ונסיק את $\neg p$.
8	על מנת להוכיח טענה מהצורה $\forall x: P(x)$, נניח ש x אבר שרירותי ונוכיח $P(x)$.
9	על מנת להוכיח טענה מהצורה $\exists x: P(x)$, נמצא אבר x עבורו מתקיים $P(x)$ ונוכיח זאת.
10	על מנת להשתמש בנתון מהצורה $\exists x: P(x)$, נגדיר משתנה חדש x_0, ונוסיף את $P(x_0)$ להנחות.
11	על מנת להשתמש בנתון מהצורה $\forall x: P(x)$, נבחר אבר כלשהו a, ונוסיף את $P(a)$ להנחות.
12	על מנת להוכיח טענה מהצורה $q \wedge p$, נוכיח באופן נפרד ש p נכון וש q נכון.
13	על מנת להשתמש בנתון מהצורה $q \wedge p$, נתייחס ל p ול q כשני נתונים נפרדים.
14	על מנת להוכיח טענה מהצורה $q \Leftrightarrow p$, נוכיח באופן נפרד ש $q \Rightarrow p$ נכון וש $p \Rightarrow q$ נכון.
15	על מנת להשתמש בנתון מהצורה $q \Leftrightarrow p$, נתיחס ל $q \Rightarrow p$ ול $p \Rightarrow q$ כשני נתונים נפרדים.
16	על מנת להוכיח טענה מהצורה $r \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p$, נוכיח באופן נפרד ש $q \Rightarrow p$ נכון, $r \Rightarrow q$ נכון ו $p \Rightarrow r$ נכון.
17	על מנת להשתמש בנתון מהצורה $q \vee p$, נפרק למקרים: במקרה 1 נניח ש p נכון ונוכיח את הטענה במקרה 2 נניח ש q נכון ונוכיח את הטענה
18	על מנת להוכיח טענה מהצורה $q \vee p$, נוכיח ש p נכון או נוכיח ש q נכון.
19	על מנת להוכיח טענה מהצורה $q \vee p$, נניח ש $\neg p$ נכון ונוכיח ש q נכון.
20	על מנת להוכיח טענה מהצורה $\exists! x: P(x)$, נוכיח באופן נפרד שתי טענות: קיום: נוכיח $\exists x: P(x)$ יחידות: נוכיח $\forall y \forall z: \left(P(y) \wedge P(z)\right) \Rightarrow (y = z)$
21	על מנת להשתמש בנתון מהצורה $\exists! x: P(x)$, נוסיף שתי הנחות: קיום: $\exists x: P(x)$ יחידות: $\forall y \forall z: \left(P(y) \wedge P(z)\right) \Rightarrow (y = z)$

הוכחות עם שלילות והתניות

תרגיל: נניח ש $\neg r \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$. הוכח ש $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

רעיון ההוכחה:

נתונים	מטרה
$\neg r \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

לפי אסטרטגיה 7, ננסה להוסיף את $\neg r$ לנתונים ולהסיק את $p \Rightarrow \neg q$ או להוסיף את $\neg(p \Rightarrow \neg q)$ ולהסיק את r.

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את p להנחות ונוכיח את $q \Rightarrow r$.

נתונים	מטרה
$\neg r \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$ p	$q \Rightarrow r$

בעזרת אסטרטגיה 2, נוסיף את $\neg r$ להנחות ונוכיח את $\neg q$.

נתונים	מטרה
$\neg r \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$ p $\neg r$	$\neg q$

ממודוס פוננס מ $\neg r \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$ ו $\neg r$ נובע $p \Rightarrow \neg q$.
נפעיל את מודוס פוננס בשנית ונקבל מ $p \Rightarrow \neg q$ ו p את $\neg q$.

<u>הוכחה</u>: נניח את p ונוכיח $q \Rightarrow r$.
לצורך זאת נניח את $\neg r$ ונוכיח את $\neg q$.
ממודוס פוננס מ $\neg r \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$ ו $\neg r$ נובע $p \Rightarrow \neg q$.
נפעיל את מודוס פוננס בשנית ונקבל מ $p \Rightarrow \neg q$ ו p את $\neg q$.
קיבלנו ש $\neg r \Rightarrow \neg q$ נכון, וזה שקול ל $q \Rightarrow r$.
לסיכום קיבלנו ש $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

תרגיל: נניח ש $A \subseteq C$, ש B, C זרות ויהי x שרירותי. הוכח שאם $x \in A$ אזי $x \notin B$.

רעיון ההוכחה:

נתונים	מטרה
$A \subseteq C$ $B \cap C = \emptyset$ x שרירותי	$x \in A \Rightarrow x \notin B$

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $x \in A$ להנחות ונוכיח את $x \notin B$.

נתונים	מטרה
$A \subseteq C$ $B \cap C = \emptyset$ $x \in A$	$x \notin B$

בעזרת אסטרטגיה 4, נוסיף את $x \in B$ להנחות ונגיע לסתירה.

נתונים	מטרה
$A \subseteq C$ $B \cap C = \emptyset$ $x \in A$ $x \in B$	סתירה

מכיון ש $A \subseteq C$ ו $x \in A$ נקבל ש $x \in C$.

כעת $x \in C$ וגם $x \in B$, לכן $x \in B \cap C$, וזו סתירה להנחה ש $B \cap C = \emptyset$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש $x \in A$ ונניח בשלילה ש $x \in B$.

מכיון ש $A \subseteq C$ ו $x \in A$ נקבל ש $x \in C$.

כעת $x \in C$ וגם $x \in B$, לכן $x \in B \cap C$, וזו סתירה להנחה ש $B \cap C = \emptyset$.

לכן אם $x \in A$ אז $x \notin B$.

<u>הוכחות עם כמתים</u>

<u>תרגיל</u>: תהיינה A, B קבוצות. הוכח שאם $A \cap B = A$ אזי $A \subseteq B$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

אנו צריכים להוכיח ש $(A \cap B = A) \Rightarrow (A \subseteq B)$, נשתמש באסטרטגיה 1.

נתונים	מטרה
$A \cap B = A$	$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$

בעזרת אסטרטגיה 8, נניח ש x אבר שרירותי.

נתונים	מטרה
$A \cap B = A$ x שרירותי	$x \in A \Rightarrow x \in B$

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $x \in A$ להנחות ונוכיח את $x \in B$.

נתונים	מטרה
$A \cap B = A$ $x \in A$	$x \in B$

כעת מכיון ש $x \in A$ ו $A \cap B = A$ נקבל ש $x \in A \cap B$, ובפרט $x \in B$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש $A \cap B = A$.

אם $A = \emptyset$ אזי מתקיים ש $A \subseteq B$.

אחרת, יהי $x \in A$ אבר שרירותי.

מכיון ש $x \in A$ ו $A \cap B = A$ נקבל ש $x \in A \cap B$, ובפרט $x \in B$.

כעת מכיון ש $x \in A$ אבר שרירותי נקבל ש $\forall x \in A: x \in B$, כלומר $A \subseteq B$.

לסיכום, אם $A \cap B = A$ אזי $A \subseteq B$.

<u>הערה</u>: ניתן להניח ש x אבר שרירותי ולהוכיח ש $x \in A \Rightarrow x \in B$, ולאחר מכן להניח ש $x \in A$ ולהוכיח ש $x \in B$. במקרה זה אין צורך לבדוק מה קורה אם $x \notin A$, ובפרט אם $A = \emptyset$.

זו הצורה שבה התקדמנו ברעיון ההוכחה.

בהוכחה עצמה קיצרנו: הנחנו ש $x \in A$ אבר שרירותי והוכחנו ש $x \in B$.

במקרה זה אנו צריכים להניח ש A אינה קבוצה ריקה, ולכן בדקנו מקרה זה בנפרד.

שתי הטכניקות סטנדרטיות ונמצאות בשימוש, אך חשוב לשים לב לניואנס זה כשכותבים הוכחה.

תרגיל: תהי $\{ A_i \mid i \in I \}$ משפחה של קבוצות ונניח ש $I \neq \emptyset$. הוכח ש $\cup_{i\in I} P(A_i) \subseteq P(\cup_{i\in I} A_i)$.
<u>רעיון ההוכחה</u>:

נתונים	מטרה
$I \neq \emptyset$	$\forall X\big(X \in \cup_{i\in I} P(A_i) \Rightarrow X \in P(\cup_{i\in I} A_i)\big)$

בעזרת אסטרטגיה 8, נניח ש X קבוצה שרירותית.

נתונים	מטרה
$I \neq \emptyset$ X קבוצה שרירותית	$X \in \cup_{i\in I} P(A_i) \Rightarrow X \in P(\cup_{i\in I} A_i)$

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $X \in \cup_{i\in I} P(A_i)$ להנחות ונוכיח את $X \in P(\cup_{i\in I} A_i)$.

נתונים	מטרה
$I \neq \emptyset$ $X \in \cup_{i\in I} P(A_i)$	$X \in P(\cup_{i\in I} A_i)$

ניזכר ש $\cup_{i\in I} P(A_i) = \{A \mid \exists i \in I: A \in P(A_i)\}$, ומכיון ש $X \in \cup_{i\in I} P(A_i)$ ו $I \neq \emptyset$ ניתן להשתמש באסטרטגיה 10, ולהגדיר משתנה חדש $i_0 \in I$ עבורו מתקיים $X \in P\big(A_{i_0}\big)$.

נתונים	מטרה
$i_0 \in I$ $X \in P\big(A_{i_0}\big)$	$X \in P(\cup_{i\in I} A_i)$

נקבל ש $X \subseteq A_{i_0}$, כלומר $X \subseteq \cup_{i\in I} A_i$, ולכן $X \in P(\cup_{i\in I} A_i)$.

<u>הוכחה</u>: תהי X קבוצה שרירותית ונניח ש $X \in \cup_{i\in I} P(A_i)$.
מכיון ש $I \neq \emptyset$ קיים $i_0 \in I$ עבורו מתקיים $X \in P\big(A_{i_0}\big)$.
אזי $X \subseteq A_{i_0}$, כלומר $X \subseteq \cup_{i\in I} A_i$, ולכן $X \in P(\cup_{i\in I} A_i)$.
לסיכום, קיבלנו ש $\cup_{i\in I} P(A_i) \subseteq P(\cup_{i\in I} A_i)$.

הוכחות עם "גם" ועם "גרירה כפולה"

הגדרה: יהיו $m, n \in \mathbb{Z}$. נאמר ש m מחלק את n אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $n = m \cdot k$, ונסמן $m \mid n$.

תרגיל: לכל מספר שלם z, $z \mid 6$ אם ורק אם $z \mid 3 \wedge z \mid 2$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:
אנו צריכים להוכיח ש $\forall z \in \mathbb{Z}\big(6 \mid z \Leftrightarrow (2 \mid z \wedge 3 \mid z)\big)$.
בעזרת אסטרטגיה 8 נניח ש $z \in \mathbb{Z}$ אבר שרירותי.

נתונים	מטרה
$z \in \mathbb{Z}$	$6 \mid z \Leftrightarrow (2 \mid z \wedge 3 \mid z)$

בעזרת אסטרטגיה 14 נוכיח כל גרירה בנפרד.

1) נתחיל עם "רק אם"

נתונים	מטרה
$z \in \mathbb{Z}$	$6 \mid z \Rightarrow (2 \mid z \wedge 3 \mid z)$

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $6 \mid z$ להנחות ונוכיח ש $(2 \mid z \wedge 3 \mid z)$.

נתונים	מטרה
$z \in \mathbb{Z}$ $6 \mid z$	$(2 \mid z \wedge 3 \mid z)$

בעזרת אסטרטגיה 12, נוכיח בנפרד ש $2 \mid z$ וש $3 \mid z$.

מכיון ש $6 \mid z$ קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $z = 6k$.

מצד אחד נקבל ש $z = 2(3k)$ ומצד שני נקבל ש $z = 3(2k)$.

מכיון ש $k \in \mathbb{Z}$ נובע ש $2k$ ו $3k$ הם מספרים שלמים, ולכן $2 \mid z$ וגם $3 \mid z$.

2) נמשיך עם "אם"

נתונים	מטרה
$z \in \mathbb{Z}$	$6 \mid z \Leftarrow (2 \mid z \wedge 3 \mid z)$

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $(2 \mid z \wedge 3 \mid z)$ להנחות ונוכיח את $6 \mid z$.

בעזרת אסטרטגיה 13, נתיחס ל $2 \mid z$ ול $3 \mid z$ כנתונים נפרדים.

נתונים	מטרה
$z \in \mathbb{Z}$ $2 \mid z$ $3 \mid z$	$6 \mid z$

מכיון ש $2 \mid z$ קיים $u \in \mathbb{Z}$ כך ש $z = 2u$.

בנוסף מכיון ש $3 \mid z$ קיים $v \in \mathbb{Z}$ כך ש $z = 3v$.

כעת נשים לב ש $3z = 6u$ ובנוסף $2z = 6v$, לכן $z = 3z - 2z = 6u - 6v = 6(u - v)$.

$u, v \in \mathbb{Z}$ ולכן גם $u - v \in \mathbb{Z}$, ונקבל ש $6 \mid z$.

<u>הוכחה</u>: יהי $z \in \mathbb{Z}$ אבר שרירותי.

$(\Rightarrow)$ נניח ש $6 \mid z$ ונוכיח ש $2 \mid z$ וגם $3 \mid z$.

מכיון ש $6 \mid z$ קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $z = 6k$, לכן $z = 2(3k)$ ובנוסף $z = 3(2k)$.

מכיון ש $2k, 3k \in \mathbb{Z}$ נקבל ש $2 \mid z$ וגם $3 \mid z$.

$(\Leftarrow)$ נניח ש $2 \mid z$ וגם $3 \mid z$ ונוכיח ש $6 \mid z$.

מכיון ש $2 \mid z$ קיים $u \in \mathbb{Z}$ כך ש $z = 2u$, ולכן $3z = 6u$.

בנוסף מכיון ש $3 \mid z$ קיים $v \in \mathbb{Z}$ כך ש $z = 3v$, ולכן $2z = 6v$.

נקבל ש $z = 3z - 2z = 6u - 6v = 6(u - v)$ ומכיון ש $u - v \in \mathbb{Z}$ נקבל ש $6 \mid z$.

<u>סימון</u>: תהי $\mathcal{F}$ משפחה של קבוצות. נסמן

$$\cup \mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{ x \mid \exists A \in \mathcal{F}: x \in A \}$$

$$\cap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{ x \mid \forall A \in \mathcal{F}: x \in A \}$$

<u>דוגמה</u>: תהיינה $A = \{1,2,3\}, B = \{3,4,5\}$ ונגדיר $\mathcal{F} = \{A, B\}$.

אזי $\cup \mathcal{F} = A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$ ו $\cap \mathcal{F} = A \cap B = \{3\}$.

<u>תרגיל</u>: תהיינה $\mathcal{F},\mathcal{G}$ משפחות של קבוצות. הוכח ש $\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\subseteq(\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

נתונים	מטרה
	$\forall x\big(x\in\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\Rightarrow x\in(\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})\big)$

בעזרת אסטרטגיה 8, נניח ש x אבר שרירותי.

נתונים	מטרה
x שרירותי	$x\in\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\Rightarrow x\in(\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})$

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $x\in\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})$ להנחות ונוכיח ש $x\in(\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})$.

נתונים	מטרה
$x\in\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})$	$x\in(\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})$

נשכתב את הנתונים בעזרת הסימון $\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})=\{x\mid\exists A\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}(x\in A)\}$.

נתונים	מטרה
$\exists A\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}(x\in A)$	$(x\in\cup\mathcal{F})\wedge(x\in\cup\mathcal{G})$

בעזרת אסטרטגיה 10, נגדיר משתנה חדש $A_0\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ עבורו מתקיים $x\in A_0$.

נשכתב את הנתונים בעזרת הסימון $\cup\mathcal{F}=\{x\mid\exists A\in\mathcal{F}(x\in A)\}$.

נתונים	מטרה
$A_0\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ $x\in A_0$	$\big(\exists A\in\mathcal{F}(x\in A)\big)\wedge\big(\exists B\in\mathcal{G}(x\in B)\big)$

כעת לפי אסטרטגיה 12 נוכיח באופן נפרד ש $x\in\cup\mathcal{F}$ וש $x\in\cup\mathcal{G}$.

מכיון ש $A_0\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ נובע ש $A_0\in\mathcal{F}$ וגם $A_0\in\mathcal{G}$.

מכיון ש $A_0\in\mathcal{F}$ ו $x\in A_0$, נקבל לפי EG ש $\exists A\in\mathcal{F}(x\in A)$.

באותו אופן, מכיון ש $A_0\in\mathcal{G}$ ו $x\in A_0$, נקבל ש $\exists B\in\mathcal{G}(x\in B)$.

<u>הוכחה</u>: יהי x אבר שרירותי ונניח ש $x\in\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})$.

אזי קיימת קבוצה $A_0\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ עבורה מתקיים $x\in A_0$.

מכיון ש $A_0\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ נובע ש $A_0\in\mathcal{F}$ וגם $A_0\in\mathcal{G}$.

מכיון ש $x\in A_0$ נקבל ש $x\in\cup\mathcal{F}$ וגם $x\in\cup\mathcal{G}$, כלומר $x\in(\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})$.

לסיכום, קיבלנו ש $\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\subseteq(\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})$.

<u>הוכחות עם "או"</u>

<u>תרגיל</u>: הוכח שלכל מספר ממשי x, אם $x^2\geq x$ אזי $x\leq 0$ או $x\geq 1$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

אנו רוצים להוכיח $\forall x\in\mathbb{R}\big(x^2\geq x\Rightarrow(x\leq 0\vee x\geq 1)\big)$.

בעזרת אסטרטגיה 8, נניח ש x אבר שרירותי ב $\mathbb{R}$.

נתונים	מטרה
$x\in\mathbb{R}$	$x^2\geq x\Rightarrow(x\leq 0\vee x\geq 1)$

בעזרת אסטרטגיה 1, נוסיף את $x^2\geq x$ להנחות ונוכיח את $(x\leq 0\vee x\geq 1)$.

מטרה	נתונים
$x \le 0 \lor x \ge 1$	$x \in \mathbb{R}$ $x^2 \ge x$

כעת נשתמש באסטרטגיה 19, יש 2 אפשרויות:

- נניח ש $x > 0$ ונוכיח ש $x \ge 1$
- נניח ש $x < 1$ ונוכיח ש $x \le 0$

נבחר באפשרות הראשונה.

מטרה	נתונים
$x \ge 1$	$x \in \mathbb{R}$ $x^2 \ge x$ $x > 0$

כעת, מכיון ש $x > 0$, ניתן לחלק את אי השיויון $x^2 \ge x$ ב x ולקבל $x \ge 1$.

<u>הוכחה</u>: יהי $x \in \mathbb{R}$, ונניח ש $x^2 \ge x$.

אם $x \le 0$ נקבל ש $x \le 0 \lor x \ge 1$.

אחרת, אם $x > 0$, אזי ניתן לחלק את אי השיויון $x^2 \ge x$ ב x ולקבל $x \ge 1$.

לכן נקבל שאם $x^2 \ge x$ אז $x \le 0 \lor x \ge 1$.

<u>**תרגיל**</u>: הוכח ש $(A \cup B) \setminus C \subseteq A \cup (B \setminus C)$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

אנו רוצים להוכיח $\forall x\big(x \in (A \cup B) \setminus C \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus C)\big)$.

בעזרת אסטרטגיה 8 נניח ש x אבר שרירותי.

מטרה	נתונים
$x \in (A \cup B) \setminus C \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus C)$	x שרירותי

בעזרת אסטרטגיה 1 נניח ש $x \in (A \cup B) \setminus C$ ונוכיח $x \in A \cup (B \setminus C)$.

מטרה	נתונים
$x \in A \cup (B \setminus C)$	$x \in (A \cup B) \setminus C$

נשכתב את הנתונים (נעזר באסטרטגיה 13).

מטרה	נתונים
$x \in A \lor x \in B \setminus C$	$x \in A \cup B$ $x \notin C$

לפי אסטרטגיה 18 מספיק להוכיח ש $x \in A$ או $x \in B \setminus C$.

כעת נשתמש באסטרטגיה 17, מכיון ש $x \in A \cup B$ יש 2 אפשרויות: $x \in A$ או $x \in B$.

- מקרה 1: $x \in A$
- מקרה 2: $x \in B$, מכיון ש $x \notin C$ נקבל ש $x \in B \setminus C$

<u>הוכחה</u>: יהי x אבר שרירותי ונניח ש $x \in (A \cup B) \setminus C$, אזי $x \in A \cup B \land x \notin C$.

מכיון ש $x \in A \cup B$ יש 2 אפשרויות:

- מקרה 1: $x \in A$
- מקרה 2: $x \in B$, מכיון ש $x \notin C$ נקבל ש $x \in B \setminus C$

מסיכום שני המקרים נקבל $x \in A \lor x \in B \setminus C$, ולכן $x \in A \cup (B \setminus C)$.

מכיון ש x אבר שרירותי, נובע ש $(A \cup B) \setminus C \subseteq A \cup (B \setminus C)$.

הוכחות קיום ויחידות

תרגיל: הוכח שלכל מספר ממשי x, אם $x \neq 2$ אזי קיים מספר ממשי יחיד y כך ש $\frac{2y}{y+1} = x$.

רעיון ההוכחה:

אנו רוצים להוכיח $\forall x \in \mathbb{R}\left(x \neq 2 \Rightarrow \exists!\, y \in \mathbb{R}\left(\frac{2y}{y+1} = x\right)\right)$.

בעזרת אסטרטגיה 8 נניח ש x אבר שרירותי.

נתונים	מטרה
$x \in \mathbb{R}$ $x \neq 2$	$x \neq 2 \Rightarrow \exists!\, y \in \mathbb{R}\left(\frac{2y}{y+1} = x\right)$

בעזרת אסטרטגיה 1 נניח ש $x \neq 2$ ונוכיח $\exists!\, y \in \mathbb{R}\left(\frac{2y}{y+1} = x\right)$.

נתונים	מטרה
$x \in \mathbb{R}$ $x \neq 2$	$\exists!\, y \in \mathbb{R}\left(\frac{2y}{y+1} = x\right)$

כעת לפי אסטרטגיה 20 נוכיח בנפרד קיום ויחידות.

על מנת להראות קיום, נפעל לפי אסטרטגיה 9.

נפתור את המשוואה על מנת למצוא y מתאים.

$$\frac{2y}{y+1} = x \Rightarrow 2y = x(y+1) \Rightarrow y(2-x) = x \Rightarrow y = \frac{x}{2-x}$$

(כאשר המעבר האחרון אפשרי מכיון ש $x \neq 2$), בנוסף נשים לב ש $y \in \mathbb{R}$ (כי $x \neq 2$).

כעת נראה יחידות:

נתונים	מטרה
$x \in \mathbb{R}$ $x \neq 2$	$\forall y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R}\left(\left(\frac{2y}{y+1} = x \wedge \frac{2z}{z+1} = x\right) \Rightarrow y = z\right)$

נשתמש באסטרטגיה 8 ונניח ש y, z מספרים ממשיים שרירותיים.

נתונים	מטרה
$x, y, z \in \mathbb{R}$ $x \neq 2$	$\left(\frac{2y}{y+1} = x \wedge \frac{2z}{z+1} = x\right) \Rightarrow y = z$

בעזרת אסטרטגיה 1 נניח $\frac{2y}{y+1} = x \wedge \frac{2z}{z+1} = x$ ונוכיח $y = z$, ובעזרת אסטרטגיה 13 נפרק לשני נתונים.

נתונים	מטרה
$x, y, z \in \mathbb{R}$ $x \neq 2$ $\frac{2y}{y+1} = x$ $\frac{2z}{z+1} = x$	$y = z$

ונקבל

$$\frac{2y}{y+1} = \frac{2z}{z+1} \Rightarrow 2y(z+1) = 2z(y+1) \Rightarrow yz + y = zy + z \Rightarrow y = z$$

הוכחה: יהי $x \in \mathbb{R}$ ונניח ש $x \neq 2$.

קיום: עבור $y = \frac{x}{2-x}$ מתקיים $y \in \mathbb{R}$ (מכיון ש $x \neq 2$) ונקבל ש

$$\frac{2y}{y+1} = \frac{2\left(\frac{x}{2-x}\right)}{\left(\frac{x}{2-x}\right)+1} = \frac{2x}{x+2-x} = \frac{2x}{2} = x$$

יחידות: נניח שקיימים $y, z \in \mathbb{R}$ המקיימים $\frac{2y}{y+1} = x, \frac{2z}{z+1} = x$, אזי

$$\frac{2y}{y+1} = \frac{2z}{z+1} \Rightarrow 2y(z+1) = 2z(y+1) \Rightarrow yz + y = zy + z \Rightarrow y = z$$

כלומר $y = z$.

תרגיל: תהיינה A, B, C קבוצות כך ש A, B אינן זרות, A, C אינן זרות וב A יש אבר יחיד.
הוכח ש B, C אינן זרות.
רעיון ההוכחה:

נתונים	מטרה
$A \cap B \neq \emptyset$ $A \cap C \neq \emptyset$ $\exists! x(x \in A)$	$B \cap C \neq \emptyset$

נשכתב את הנתונים, ולפי אסטרטגיה 21 מהנתון האחרון נקבל הנחת קיום והנחת יחידות.

נתונים	מטרה
$\exists x(x \in A \cap B)$ $\exists x(x \in A \cap C)$ $\exists x(x \in A)$ $\forall y \forall z\big((y \in A \wedge z \in A) \Rightarrow y = z\big)$	$\exists x(x \in B \cap C)$

בעזרת אסטרטגיה 10 נקבל

נתונים	מטרה
$x_0 \in A \cap B$ $x_1 \in A \cap C$ $\exists x(x \in A)$ $\forall y \forall z\big((y \in A \wedge z \in A) \Rightarrow y = z\big)$	$\exists x(x \in B \cap C)$

מכיון ש $x_0 \in A \cap B$ נקבל ש $x_0 \in A$ וגם $x_0 \in B$.
מכיון ש $x_1 \in A \cap C$ נקבל ש $x_1 \in A$ וגם $x_1 \in C$.
נקבל ש $x_0 \in A \wedge x_1 \in A$, ומההנחה $\forall y \forall z\big((y \in A \wedge z \in A) \Rightarrow y = z\big)$ נובע ש $x_0 = x_1$.
כעת נקבל ש $x_0 \in B$ ובנוסף $x_0 \in C$.
לכן $x_0 \in B \cap C$.

הוכחה: מכיון ש $A \cap B \neq \emptyset$ קיים $x_0 \in A \cap B$, כלומר $x_0 \in A$ וגם $x_0 \in B$.
באופן דומה, מכיון ש $A \cap C \neq \emptyset$ קיים $x_1 \in A \cap C$, כלומר $x_1 \in A$ וגם $x_1 \in C$.
מכיון שב A יש אבר יחיד נובע ש $x_0 = x_1$, כלומר $x_0 \in B \cap C$, ולכן $B \cap C \neq \emptyset$.