הסתברות תרגול-בלב-1

talperri@zahav.net.il - מייל של המתרגל.

10% מציון הקורס.

1.תרגיל: מסדרים בשורה 15 קוביות: 5 אדומות, 7 לבנות ו-3 ירוקות.
בכמה סידורים שונים ניתן להבחין?

תשובה: א) ניתן לסדר 15 עצמים ב- $15!$ אפשרויות (עם חשיבות לסדר).
אך גם אם נחליף בין כל הקוביות האדומות לדוגמא נראה את אותו סידור
למעשה, לכן נחלק בסידור הפנימי של הקוביות האדומות (כנ"ל לגבי הלבנות והירוקות).

$$\frac{15!}{5!\,7!\,3!}$$ - סידור 15 קוביות

סידורים ירוקות לבנות אדומות

ב) יש 15 מקומות בשורה, נבחר 5 מקומות לקוביות האדומות (ללא חשיבות לסדר):
$\binom{15}{5}=\frac{15!}{5!(15-5)!}$. לאחר מכן יש לבחור 7 מקומות לקוביות הלבנות: $\binom{10}{7}=\frac{10!}{7!(10-7)!}$.
(מתוך 10 המקומות שנותרו.), ואז נשאר לקוביות הירוקות בחירה של 3 מתוך 3.

מקומות נותרים.

סה"כ: $\binom{15}{5}\binom{10}{7}\binom{3}{3}$

2.תרגיל: בכמה אפשרויות שונות ניתן לסדר n אנשים בשורה, כך ש-
א) משה ורינה יעמדו זה לצד זו.
ב) משה, רינה ויואב יעמדו בסמיכות.

תשובה: א) נתייחס למשה ורינה כאל יחידה אחת ואז יהיו לנו n-1 "אנשים" לסדר.
דהיינו $(n-1)!$ ונכפול במספר הסידורים האפשריים של משה ורינה בתוך היחידה: $(n-1)!\,2!$
משה ורינה.

ב) $(n-2)!\,3!$ ← נתייחס למשה, רינה ויואב כיחידה אחת.
ערבוב משה, רינה ויואב

3.תרגיל: כמה מספרים שונים בני 4 ספרות ניתן לייצר מיחידות הלקו הבאות? $\boxed{8\,|\,8\,|\,6\,|\,5\,|\,3\,|\,2}$

תשובה: ישנן 2 אפשרויות: א) הספרה 8 מופיעה פעמיים.
ב) הספרה 8 מופיעה לכל היותר פעם אחת (כל הספרות במס' יהיו שונות).

א) נבחר 2 מקומות מתוך ה-4 למיקום ה-8 ולאחר מכן נותרו 2 מקומות שבראשון
יש 4 אפשרויות ובשני 3 אפשרויות. $\binom{4}{2}\cdot\underset{\text{מקום 1}}{4}\cdot\underset{\text{מקום 2}}{3}$ - בחירת מקומות עבור 8.

ב) נבחר 4 ספרות מתוך 5 ונסדר אותן בשורה: $4!=\frac{5!}{4!\cdot 1!}$ $\binom{5}{4}\cdot\underset{\text{אפשרויות הסדר של 4 ספרות}}{4!}$ - בחירת 4 ספרות.

הסתברות תרגול- 27/2 -2

תרגיל 4: בכמה אפשרויות שונות ניתן לחלק קבוצה של 2n אנשים ל-n זוגות.

פתרון: א) נעמיד את האנשים בשורה ונחליט שכל 2 סמוכים הם זוג.

סה"כ אפשרויות הסידור של 2n אנשים עם חשיבות לסדר הוא $(2n)!$.

עתה נחלק במספר הסידורים הפנימיים $(2=2!)$ עבור כל אחד מהזוגות כי אין חשיבות לסדר בכל זוג

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

מס׳ סידורי הזוגות - $n!$

סידור בתוך הזוגות ← 2^n

ב) $$\frac{\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{n!}$$

זוג 1 ←

בחירה של זוג בלי חשיבות לסדר בתוך הזוג ←

ערבול הזוגות - $n!$

תרגיל 5: בקרטון נמצאות 50 נורות, מתוכן 15 מקולקלות.

אדם שולף באופן אקראי 3 נורות מהקרטון. כמה אפשרויות שליפה שונות ישנן שבהן בידו לפחות נורה תקינה אחת?

פתרון: א) ישנן $\binom{50}{3}$ אפשרויות לבחור 3 נורות מתוך 50. מתוכן $\binom{15}{3}$ אפשרויות לבחירה רק של מקולקלות. לכן סה"כ עפ"י המאורע המשלים: $\binom{50}{3}-\binom{15}{3}$.

ב) פיתרון ישיר. סכימת כל המקרים: 1) 3 תקינות.

2) 2 תקינות + 1 מקולקלת.

3) 1 תקינה + 2 מקולקלות.

$$\binom{35}{3}+\binom{35}{2}\cdot\binom{15}{1}+\binom{35}{1}\cdot\binom{15}{2}$$

2 מקולקלות – תקינה 1 מקולקלת – 2 תקינות

תרגיל 6: בספינה תועה נמצאים 20 ילדים. הילדים אינם זוכרים את ימי הולדתם ומעוניינים לקבל יום הולדת.

א) מה מספר האפשרויות לחלק לילדים ימי הולדת כך שבדיוק 2 ילדים יקבלו יום זהה ו-18 ילדים יקבלו כל אחד יום הולדת משלו (שונה).

ב) מה מספר האפשרויות לחלק להם ימי הולדת כך שיהיה לפחות יום אחד בשנה שאותו יחגגו 2 ילדים.

פתרון: א) נבחר 2 ילדים שיקבלו את אותו יום הולדת (נתייחס אליהם כיחידה אחת).

ואז נבחר 19 ימי הולדת שונים עם חשיבות לסדר. $\binom{20}{2}\cdot\binom{365}{19}\cdot 19!$

בחירת הזוג, בחירת ימי הולדת, סידור של הימים שבחרנו

ב) נפתור לפי המאורע המשלים- לאף אחד אין יום הולדת חופף למשהו אחר.

$365^{20}-\binom{365}{20}\cdot 20!$ – מתן ימי הולדת, סידור ימי הולדת שבחרנו

הסתברות - תרגול - 3

7. תרגיל: 12 ילדים מתכוננים לעמוד בשורה. בכמה אפשרויות הם יכולים לעשות זאת כך ש- א) בין חנן ליגאל יש בדיוק 5 ילדים.

ב) כנ"ל אך הילדים מתכוננים לרקוד במעגל.

תשובה: א) $\overbrace{\binom{10}{5}\cdot 5!\cdot 2!}^{(*)}\cdot 6!$

$\binom{10}{5}$ - בחירת הילדים בין חנן ליגאל.

$5!$ - סידור הילדים בין חנן ויגאל

$2!$ - סידור חנן ויגאל.

$6!$ - סידור 6 אנשים עם גוש

חנן ——— 5 ——— יגאל

נתייחס לגוש שחישבנו את כל האפשרויות עבור ב-(*) כיחידה אחת, לכן נותר לנו לסדר 6 אנשים שונים.

ב) ישנן בדיוק 12 אפשרויות של סידור בשורה שבסגירה למעגל יתנו את אותו המעגל. דוגמא עבור 3 אנשים (איברים)

$\boxed{A|B|C}$

$\boxed{C|A|B}$

$\boxed{B|C|A}$

= לכן סה"כ נקבל $\frac{10!\cdot 12}{12} = 10!$

8. תרגיל: א) כמה מילים שונות ניתן ליצור תוך שימוש בכל האותיות. ABRACADABRA

ב) בכמה מהן אין כלל 2 אותיות A הנמצאות זו לצד זו.

תשובה:

אות	מס הופעות
A	5
B	2
C	1
R	2
D	1

יש 11 אותיות כמו בשאלה 1.

א) $\frac{11!}{5!\,2!\,1!\,2!\,1!}$

ב) נסדר את האותיות $\_^{1}B\_^{2}R\_^{3}C\_^{4}D\_^{5}B\_^{6}R\_^{7}$

ונבחר 5 מקומות מתוך 7 בהן נמקם את A.

סה"כ האפשרויות לבחור 5 מקומות ל-A מתוך ה-7

האפשריים $\binom{7}{5}\cdot\frac{6!}{1!\,1!\,2!\,2!}$

אפשרויות עבור שאר האותיות - ערכן פנימיים עבור R,B,C,D.

הסתברות תרגול - 6/3 - 1

שאלה 1 - תהי $A=\{1,...,150\}$ כמה איברים של A אינם מתחלקים ב-3 ו-5?

פתרון - תהי A_3 הקבוצה שמכילה את כל האיברים ב-A שמתחלקים ב-3.

ותהי A_5 -"- המתחלקים ב-5. אזי $|A_3|=\frac{150}{3}=50$, $|A_5|=\frac{150}{5}=30$

$A_3\cap A_5$ = כל האיברים ב-A מתחלקים גם ב-3 וגם ב-5. לכן כל האיברים ב-A המתחלקים ב-15. $|A_3\cap A_5|=\frac{150}{5}=10$. לפי עקרון ההכלה וההדחה קבוצת האיברים $B\subseteq A$ המתחלקים או ב-3 או ב-5, היא: $|B|=|A_3|+|A_5|-|A_3\cap A_5|=70$.

לכן קבוצת האיברים שאינם מתחלקים ב-3 וב-5 היא $A\setminus B$ ומס' האיברים בה:

$$|A\setminus B|=|A|-|B|=150-70=80$$

שאלה 2 - כמה פתרונות שונים יש למשוואה: $x_1+x_2+...+x_k=n$

כאשר - (א) לכל $x_i>0$

(ב) לכל $x_i=1$, או $x_i=2$ $(k\le n\le 2k)$

(ג) לכל i, $x_i\geq 0$ ובנוסף לכן יש בדיוק 4 x_i השווים ל-0.

פתרון - השאלה מקבילה לבעיית חלוקת n כדורים ל-k תאים (כאשר x_i הוא מס' הכדורים בתא ה-i).

(א) בסעיף זה $x_i\geq 0$ לכן שישנה אפשרות לתאים ריקים. יש לחשוב על אפשרויות - הסידור של k-1 מחיצות ו-n כדורים. בעיקרון לכן כל האפשרויות - הסידור של $(k-1)+n$ עצמים מגוונים. n להם (כדורים) ו-$(k-1)$ להם (מחיצות). $\binom{n+k-1}{n}=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$ או $\binom{n+k-1}{k-1}$

כל הכדורים יחד ← כל המחיצות יחד →

(ב) על מנת לוודא שבכל תא יהיה כדור אחד או שניים, נחלק תחילה כדור אחד בכל תא. כעת, נותרו n-k כדורים שיש לחלק ב-k תאים אפשריים. $\binom{k}{n-k}$

(ג) במקרה זה נבחר תחילה 4 תאים מתוך k שישארו ריקים. $\binom{k}{4}$, כעת יש לחלק n כדורים ל-k-4 תאים. אך ב-k-4 התאים האלו חייב להיות לפחות כדור אחד.

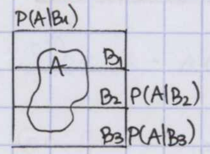
מס' האפשרויות לחלק n כדורים ל-k-4 תאים אפשריים שקול למס' האפשרויות למקם k-5 מחיצות בתוך n-1 מקומות אפשריים. סה"כ $\binom{n-1}{k-5}$ ולסיכום $\binom{n-1}{k-5}\binom{k}{4}$ - בחירת הריקה.

נוסחאות - (1) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

(2) $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)$

(3) $P(A|B)=\frac{P(A|B)\cdot P(A)}{P(B)}$

הסתברות תרגיל - 6/3 - 2



נוסחת ההסתברות השלמה - אם $B_1,\dots,B_n$ מאורעות זרים.

כך ש- $P(B_1\cup\dots\cup B_n)=1$ אזי: $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+\dots+P(A|B_n)P(B_n)$

$$P(A)=P\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)\right)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(A\cap B_k)\right)\underset{\text{לפי ההכלה וההדחה}}{=}\sum_{k=1}^{n}P(A\cap B_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A|B_k)P(B_k)$$

מאורעות A ו-B יקראו בלתי תלויים (ב"ת) אם $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ $\Leftarrow$ $P(A|B)=P(A)$

שאלה 3- הוכיחו כי - $P(E\cap F^c)=P(E)-P(E\cap F)$

$$E=(E\cap F)\cup(E\cap F^c)$$

$$P(E)=P((E\cap F)\cup(E\cap F^c))\overset{\text{לפי עקרון ההכלה וההדחה}}{=}P(E\cap F)+P(E\cap F^c)$$

$$\Rightarrow P(E\cap F^c)=P(E)-P(E\cap F)$$

שאלה 4- רון סטודנט שעבר מכינה למשפטים נדחה בכל בתי הספר למשפטים. ביאושו הוא פונה למכללה שיש 2 קמפוסים. בהסתמך להצלחת חבריו הוא מעריך את הסיכוי שיתקבל לקמפוס א' ב-70% ולקמפוס ב' - 40%. כמו כן הוא מעריך שישנו סיכוי של 75% שלפחות אחד מהמבקשים יענה בשלילה.

(א) מה הסיכוי שרון לא יתקבל למכללה?

(ב) מה הסיכוי שרון יקבל תשובה חיובית מקמפוס א' בלבד.

פתרון- נסמן A - קבלה לקמפוס א', B - קבלה לקמפוס ב'.

$$P(A)=0.7\ ,\ P(B)=0.4\ ,\ P(A^c\cup B^c)=0.75=P((A\cap B)^c)=1-P(A\cap B)$$

(א) $P(A^c\cap B^c)=P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B)$

$$P(A\cup B)=\underset{0.7}{P(A)}+\underset{0.4}{P(B)}-\underset{1-P(A^c\cup B^c)=1-0.75=0.25}{P(A\cap B)}=0.7+0.4-0.25=0.85$$

$$\Rightarrow P(A^c\cap B^c)=1-P(A\cup B)=1-0.85=0.15$$

(ב) $P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)=0.7-0.25=0.45$

שאלה 5- בכד נמצאים 3 כדורים אדומים, 4 לבנים ו-2 שחורים. מוציאים מהכד עם החזרה כדורים מכאן ועד עולם. מה הסיכוי שהכדור האדום הראשון שיוצא יצא לפני הכדור הלבן הראשון שיוצא.

פתרון- פתרון א- נתעלם מהוצאה של כדורים שחורים שאינם משנים דבר. ונקבל סדרה של הוצאות של כדורים אדומים ולבנים (מאחר ויש החזרה). ההסתברות שהכדור הראשון בסדרה הוא אדום (וזו הצלחתנו) היא $3/7$.

הסתברות תרגיל - 613 - 3

← פתרון ב - נסמן: A - כדור אדום יוצא לפני לבן.

B - הכדור הראשון שיוצא שחור.

W - הכדור הראשון שיוצא לבן.

R - הכדור הראשון שיוצא אדום.

נשים ♡ W,B,R מאורעות זרים המכסים את כל המאורעות האפשריים. לכן נשתמש

בנוסחא ההסתברות השלמה: $P(A)=P(A|B)\cdot P(B)+P(A|W)\cdot P(W)+P(A|R)\cdot P(R)$

$$=P(A|B)\cdot\frac{2}{9}+0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{9}\cdot P(A)+\frac{3}{9}$$

נעביר אגף ונקבל: $P(A)=\frac{3/9}{7/9}=3/7$

פתרון ג - קיבלנו טור הסתברויות אינסופי.

$$P(\text{ניצחון})=1\cdot\frac{3}{9}+1\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{9}+1\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{9}+\ldots+1\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^k\cdot\frac{3}{9}$$

$$=\frac{3}{9}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^i\right)=\frac{3}{9}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{2}{9}}\right)=\frac{3}{9}\cdot\left(\frac{1}{\frac{7}{9}}\right)=\frac{3}{7}$$

שאלה 6 - מטילים 5 פעמים מטבע הוגן בכל פעם התקבל ראש - הכניסו כדור לבן אחרת שחור.

(א) מה הסיכוי שבכד רק כדורים לבנים.

(ב) ענו שוב על (א) בהינתן שלאחר מכן הוציאו מהכד 5 כדורים עם החזרה והוציאו 5 לבנים.

פתרון (א) $P\left(\text{בכד 5 כדורים לבנים}\right)=P\left(\text{התקבלו 5 "ראש"}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(ב) מאורעות - B = הוציאו 5 כדורים לבנים.

A_i = בכד i כדורים לבנים.

$$P(A_5|B)=\frac{P(B|A_5)\cdot P(A_5)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B|A_5)P(A_5)}{\sum_{i=0}^{5}P(B|A_i)\cdot P(A_i)}=\frac{1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{5}\right)^5\cdot\binom{5}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{3125}{11000}$$

הסתברות תרגול - דף 1

שאלה - n כדורים, k שחורים, $n-k$ לבנים. 0.1 לדבר אמת

המשקיפים דיווחו שצבע הכדור שהוצא מן הכד לבן.

א) מהי ההסתברות שהכדור שהוצא אכן לבן.

תשובה - $P(\text{כדור לבן} \mid \text{דיווחו לבן}) = \dfrac{P(\text{דיווחו לבן} \mid \text{כדור לבן}) \cdot P(\text{כדור לבן})}{P(\text{דיווחו לבן})}$

$$= \frac{\overset{\text{הראשון דיווח לבן}}{0.1} \cdot \overset{\text{השני דיווח}}{0.1} \cdot \frac{n-k}{n}}{P(\text{דיווחו לבן} \mid \text{כדור שחור}) \cdot P(\text{כדור שחור}) + P(\text{דיווחו לבן} \mid \text{כדור לבן}) \cdot P(\text{כדור לבן})}$$

$$= \frac{(0.1)^2 \cdot \frac{n-k}{n}}{(0.9)^2 \cdot \frac{k}{n} + (0.1)^2 \cdot \frac{n-k}{n}} = \frac{n-k}{80k+n}$$

ב) כאשר $n=2k$ מוציאים N כדורים (עם החזרה).

A = יצאו כדורים משני הצבעים.

B = יצאו לכל היותר שחור אחד.

מצאו את N כך שהמאורעות A ו-B בלתי תלויים. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

תשובה - נסמן ב-X את מס' הכדורים הלבנים שהוצאו.

$$P(A) = P(0<X<N) = 1 - P(X=0) - P(X=N) = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^N - \left(\tfrac{1}{2}\right)^N = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-1}$$

$$P(B) = P(X=N-1) + P(X=N) = \binom{N}{1} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^N + \left(\tfrac{1}{2}\right)^N = (N+1) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^N$$

$$P(A \cap B) = P(X=N-1) = \underbrace{\binom{N}{1}}_{\text{בחירת מיקום השחור}} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^N \Rightarrow N \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^N = \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-1}\right) \cdot \left((N+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^N\right)$$

$$1 = (N+1) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-1}$$

אגף ימין

$N=1 \Rightarrow 2$

$N=2 \Rightarrow 3/2$

$N=3 \Rightarrow 1$ ✓

שאלה - משתנה מקרי (מ"מ) מקבל ערכים $0, 1, 2, \dots$

ההסתברות $i = 0, 1, 2 \dots$ $P(X=i) = \dfrac{c}{3^i}$

א) מצאו את הערך של c.

ב) מצאו את התוחלת של $E(X)$

ג) מצאו את $P(X>5)$

ד) מצאו את ההסתברות ש-X זוגי.

הסתברות תרגיל - 2013-2

תשובה - א)

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(X=i)=1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{3^i}=1 \rightarrow C\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}\right)^i}_{=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}}\Big)=1 \Rightarrow C=\frac{2}{3}$$

ב) עפ"י ההגדרה:

$$E(x)=\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot P(x=i)=\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot \underbrace{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^i}_{P(X=i)}=\frac{2}{3}\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^i=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\left(\frac{1}{3}\right)^3\ldots\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}}\Big)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^i\right)'\right)$$

מתכנס במ"ש $\Sigma \leftarrow$ $$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\right)'=\frac{2}{3^2}\left(\Sigma\left(\frac{1}{3}\right)^i\right)'=\frac{2}{3^2}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}=\frac{1}{2}$$

$$\left(\Sigma q^i\right)'=\left(\frac{1}{1-q}\right)'=\frac{1}{(1-q)^2}$$

"משתנה"

ג) $$P(x>5)=1-P(x\leq 5)=1-\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}\right)\ldots$$

ד) $$P(\text{אי זוגי } x)=1-P(\text{זוגי } x)=1-\sum_{k=0}^{\infty}P(x=2k)=1-\frac{2}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}=1-\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$=1-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right)=\frac{1}{4}$$

שאלה - 4 כדורים שחורים, 3 כדורים לבנים, 2 כדורים אדומים.

מוציאים 4 כדורים (ללא החזרה). נגדיר X = מס' הצבעים השונים המופיעים במדגם.

מצאו את התפלגות X התוחלת שלו והשונות שלו.

תשובה

$$P(X=1)=P(\text{4 שחורים})=\frac{1}{\binom{9}{4}}=\frac{1}{126}$$ ← מס' האפשרויות

שחור+לבן+2 אדום, שחור+2 לבן+אדום, 2 שחור+לבן+אדום

$$P(X=3)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{1}+\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{9}{4}}=\frac{72}{126}$$

$$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)=\frac{53}{126}$$

$$P(X=i)=0 \qquad i\neq 1,2,3$$

תוחלת $$E(x)=1\cdot\left(\frac{1}{126}\right)+2\cdot\left(\frac{53}{126}\right)+3\cdot\left(\frac{72}{126}\right)=2\cdot\frac{71}{126}$$

$$E(x^2)-2E(x)\cdot E(x)+E(x)^2$$

שונות $$V(x)=E\left((x-E(x))^2\right)=E\left(x^2-E(x)\cdot 2x+E(x)^2\right)=E(x^2)-E(x)^2$$

$$E(x^2)=1^2\left(\frac{1}{126}\right)+2^2\left(\frac{53}{126}\right)+3^2\left(\frac{72}{126}\right)=6\frac{5}{6}$$

$$V(x)=6\frac{5}{6}-\left(2\cdot\frac{71}{126}\right)^2=0.262$$

שאלה -

Y \ X	0	1	2	P(Y=l)
0	1/16	1/8	1/16	1/4
1	1/8	1/4	1/8	1/2
2	1/16	1/8	1/16	1/4
P(X=k)	1/4	1/2	1/4	1

א) מצא את $V(x)$, $V(Y)$, $V(X-Y)$

X,Y ב"ת.

התפלגות שולית של X ← P(X=k)

הסתברות תרגיל - 2013 - 3

תשובה - א)

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1=E(Y)$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{4}=1.5=E(Y^2)$$

$$V(X)=V(Y)=E(X^2)-E(X)^2=1.5-1^2=0.5$$

K	-2	-1	0	1	2
$P(X-Y=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
	$P(x=0,y=2)$	$P(x=0,y=1)$ $P(x=1,y=2)$	$P(x=2,y=2)$ $P(x=0,y=0)$ $P(x=1,y=1)$	$P(x=0,y=1)$ $P(x=1,y=2)$	

$-P(x=0,y=2)$

$$E(X-Y)=-2\cdot\frac{1}{16}-1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{8}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{16}=0$$

$$E(X)-E(Y)=0$$

$$E((X-Y)^2)=0^2\cdot\frac{3}{8}+1^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+2^2\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=1$$

$$V(X-Y)=1-0=1$$

ב) הוכיחו האם X ו-Y מ"מ בלתי תלויים.

תשובה - ניתן לבדוק שהתנאי מתקיים מהטבלה - $P(X=k,Y=l)=P(X=k)\cdot P(Y=l)$

ג) חשבו $V(X-Y)$ שוב.

$$Var(X-Y)=Var(X)+Var(-Y)=Var(X)+Var(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$V(aX)=a^2V(X)$$

הסתברות – תרגול - 27/3 - 1

שאלה - האנשים $n,\dots,1$ ש- לכן מ-קבלים לעבודה באופן הבא:

* 1 מקים את החברה ושוכר את 2 להשלים בבית <- (ב-אחרון)

* העובד i נשכר

א) מצאו את התוחלת של מס' העובדים, בין $n,\dots,2,1$, שלא שכרו אף עובד.

פתרון - לכל $i=1,\dots,n$ יהי $X_i=1$ אם העובד ה-i לא שכר אף עובד ו-$X_i=0$ אחרת.

כמה עובדים לא שכרו איש $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i =$ צריכים למצוא $E(Y)$

$$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

ליניאריות

$$E(X_i)=0\cdot \overset{0}{P}(X_i=0)+1\cdot P(X_i=1)=P\left(\begin{matrix}\text{i לא שכר אף אחד} \\ \text{מהעובדים } i+1,\dots,n\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{i-1}{\cancel{i}}\cdot\frac{\cancel{i}}{i+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n-1}=\frac{i-1}{n-1}$$

העובד ה-$i+2$ העובד ה-$i+1$ הסתברות שהעובד ה-$i+1$ לא נשכר ע"י i אלא ע"י אחד מ-$i-1,\dots,1$.

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n-1}=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)-1\right)=\left(\sum i=\frac{n(1+n)}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\rightarrow E(Y)=\frac{n}{2}$$

סדרה חשבונית

ב) מצאו את $Cov(X_i,X_j)$.

פתרון - $Cov(X_i,X_j)=E(X_i\cdot X_j)-E(X_i)\cdot E(X_j)$

$E(X_i)$, $E(X_j)$ חישבנו, נותר לחשב את $E(X_i,X_j)$.

$$E(X_i\cdot X_j)=1\cdot P(X_i=1,X_j=1)+0\cdot 1 P(X_i=0,X_j=1)$$

$$+1\cdot 0\cdot P(X_i=1,X_j=0)+0\cdot 0\cdot P(X_i=0,X_j=0)=P(X_i=1,X_j=1)=$$

נניח בה"כ $i<j$.

$$=\frac{i-1}{i}\cdot\ldots\cdot\frac{j-2}{j-1}\cdot\frac{j-2}{j}\cdot\frac{j-1}{j+1}\cdots\frac{n-3}{n-1}=\frac{(i-1)(j-2)}{(n-2)(n-1)}$$

עובד $i+1$ עובד j עובד $j+1$

$$Cov(X_i,X_j)=\frac{(i-1)(j-2)}{(n-2)(n-1)}-\left(\frac{i-1}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{j-1}{n-1}\right)$$

לפי הנוסחא מה-לה

שאלה - בת 1 - הולכת לאחר 3 שעות.

בת 2- מסתובבת 5 שעות ומוצרת לחדר.

בת 3 - מסתובבת 7 שעות ומוצרת לחדר.

הסתברות — תרגול - 27.3 - 2

פתרון - X - מס' השעות עד ליציאה מהמכרה.

נסמן ב-Y את הדלת שהוא בוחר (בפעם הראשונה)

$$E(X)=\sum_y E(X|Y=y)\cdot P(Y=y)=\sum_y E(X,Y=y)\cdot\frac{1}{3}= \qquad y\in\{1,2,3\}$$

נעזר בנוסחת התוחלת השלמה.

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(3+5+E(X)+7+E(X)\right)\Rightarrow E(X)=5+\frac{2}{3}E(X)\Rightarrow E(X)=15$$

$E(X,Y=1)$ דלת ראשונה, $E(X,Y=2)$ דלת שנייה, $E(X,Y=3)$ דלת שלישית

שאלה - 3 כדים ובכל כד 5 כדורים.

בכד ה-$i=1,2,3$ ישנם i כדורים לבנים והשאר שחורים.

בכל תור נבחר כד באופן אקראי.

מה ההסתברות שב-6 תורות משחק יוצאו לפחות 2 כדורים לבנים.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \qquad X\sim Bin(n,p)$$

איפה הצלחה.

$E(X)=n\cdot p,\ V(X)=n\cdot p(1-p)$, X=מ"מ הסופר את מס' הכדורים הלבנים $=X\sim Bin(6,?)$

נחשב תחילה את ההסתברות להוציא כדור לבן.

$$P(\text{כדור לבן})=\sum_{i=1}^{3}P(\text{כדור לבן}\mid \text{כד } i)\cdot \underbrace{P(\text{כד } i)}_{=\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{5}$$

נוסחת ההסתברות השלמה. $P(\text{לבן}|\text{כד})$

$$X\sim Bin\left(6,\frac{2}{5}\right)$$

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left(P(X=0)-P(X=1)\right)=$$

$$=1-\left(\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)^6+\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(1-\frac{2}{5}\right)^5\right)=0.76672$$

שאלה - דן p, 25 פעמים. X = מס' הראשים שמקבל דן.

$X\sim Bin(25,p)$.

רן p, 15 פעמים. Y = מס' הראשים שמקבל רן.

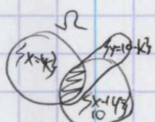
$Y\sim Bin(15,p)$

א) כיצד מתפלג X+Y.

ב) כיצד מתפלג X בהינתן ש-X+Y=10.

פתרון - א) X+Y סופר את מס' הראשים ב-25+15=40 הטלות בלתי תלויות לכן $X+Y\sim Bin(40,p)$

ב)



$$P(X=k\mid X+Y=10)=$$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{P(\{X=k\}\cap\{X+Y=10\})}{P(X+Y=10)}=\frac{P(\{X=k\}\cap\{Y=10-k\})}{P(X+Y)=10}=$$

מאורעות ב"ת

$$=\frac{P(X=k)\cdot P(Y=10-k)}{P(X+Y=10)}=\frac{\binom{25}{k}p^k\cdot(1-p)^{25-k}\cdot\binom{15}{10-k}\cdot p^{10-k}(1-p)^{15-(10-k)}}{\binom{40}{10}\cdot p^{10}\cdot(1-p)^{30}}=\frac{\binom{25}{k}\binom{15}{10-k}}{\binom{40}{10}}$$

הסתברות - תרגול - 27/3 - 3

שאלה - N- תוצאה של הטלה של קוביה הוגנת.

מטילים N פעמים מטבע. עם סיכוי לראש.

יהי X מספר הראשים שהתקבלו.

חשבו את התוחלת ואת השונות של X.

פתרון - הערה: $X\sim U(1,n)$ = מ"מ מתפלג אחיד.

$1\le k\le n \quad P(X=k)=\frac{1}{n},\ E(X)=\frac{1+n}{2},\ V(X)=\frac{n^2-1}{12}$

$N\sim U(1,6)$ תוצאת הקוביה.

$X|N\sim B(N,p)$

$$E(X)=E_N(E_{X|N}(X|N))=E_N(N\cdot p)=pE_N(N)=p\cdot\left(\frac{1+N}{2}\right)$$

תוחלת חוזרת

$$E(X|N)=N\cdot p,\ V(X|N)=N\cdot p(1-p)$$

$$Var(X)=E_N(\underbrace{V_{X|N}(X|N)}_{N\cdot p(1-p)})+V_N(\underbrace{E_{X|N}(X|N)}_{N\cdot p})$$

$$=E_N(N\cdot p(1-p))+V_N(N\cdot p)$$

$$=p(1-p)E_N(N)+p^2V_N(N)$$

$$=p(1-p)\left(\frac{1+6}{2}\right)+p^2\left(\frac{36-1}{12}\right)=$$

הסתברות תרגיל - 1-244

שאלה - יהי X מ"מ (עם ערכים שלמים אי-שליליים), לכל K שלם חיובי

$K\cdot P(X=K)=10\cdot P(X=K-1)$, מיצאו מפורשות את ההתפלגות של X.

תשובה - 1. $1\cdot P(X=1)=10\cdot P(X=0)$

2. $2\cdot P(X=2)=10\cdot P(X=1) \Rightarrow P(X=2)=10\cdot 10\cdot P(X=0)=\frac{10^2}{2}P(X=0)$

3. $3\cdot P(X=3)=10\cdot P(X=2) \Rightarrow \frac{10\cdot P(X=2)}{3} \Rightarrow P(X=3)=\frac{10^3}{3\cdot 2}\cdot P(X=0)$

באופן כללי - $P(X=K)=\frac{10^K}{K!}\cdot P(X=0)$.

נותר למצוא $P(X=0)$.

$$1=\sum_{K=0}^{\infty}P(X=K)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{10^K}{K!}\cdot P(X=0)=P(X=0)\underbrace{\sum_{K=0}^{\infty}\frac{10^K}{K!}}_{e^{10}} \Rightarrow P(X=0)=e^{-10}$$

$$e^x=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{10^K}{K!}$$

$$P(X=K)\cdot\frac{10^K e^{-10}}{K!} \Rightarrow X\sim P(10)$$

שאלה - מטילים קוביה עד שמקבלים כל הפאות. יהי Y מס' ההטלות. מהי $E(Y)$?

הערה - התפלגות גאומטרית, $X\sim G(P)$, כאשר P- ההסתברות להצלחה בניסוי.

$$K\geq 1:\ P(X=K)=(1-P)^{K-1}\cdot P$$

$$E(X)=\frac{1}{P}\quad,\quad V(X)=\frac{(1-P)}{P^2}$$

תשובה - נגדיר Y_1 = מס' ההטלות עד קבלת פאה כלשהיא.

Y_2 = מס' ההטלות לאחר מכן עד לקבלת פאה השונה מהפאה ה-1.

Y_6 = מס' ההטלות לאחר שהתקבלה הפאה ה-5 עד לקבלת הפאה ה-6.

$$Y_1\sim G(1),\ Y_2\sim G(5/6),\ Y_3\sim G(4/6),\ \dots,\ Y_6\sim G(1/6)$$

$$Y=\sum_{i=1}^{6}Y_i\quad,\ E(Y)=E(\Sigma Y_i)=\sum_{i=1}^{6}E(Y_i)=\frac{1}{1}+\frac{1}{5/6}+\frac{1}{4/6}+\dots+\frac{1}{1/6}=14.7$$

Y_i מתפלג גאומטרית.

שאלה - בכד a לבנים ו-b שחורים. 2 משחקים מוציאים לסירוגין כדורים מהכד הראשון שמוציא לבן מנצח.

א) מה ההסתברות שהמתחיל במשחק ינצח?

ב) מה ההתפלגות של מס' ההוצאות עד קביעת המנצח (כולל).

תשובה - $P(\text{המתחיל מנצח})=P(\text{כדור לבן הוצא לראשונה בתור אי-זוגי})=\sum_{i=0}^{\infty}P(\text{זוג הוצאות - בדורות שחורים והוצאה לבן 1})$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2i}}_{\text{הוצאה שחור}}\cdot\underbrace{\left(\frac{a}{a+b}\right)}_{\text{הסתברות הוצאת לבן}}$$

הסתברות - תרגול - 2-24/4

$$= \left(\frac{a}{a+b}\right)\cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\left(\frac{b}{a+b}\right)^2\right)^i}_{\text{סדרה הנדסית}} = \left(\frac{a}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\left(\frac{b}{a+b}\right)^2}\right) = \frac{a+b}{a-2b}$$

ב) מכיוון שההוצאות הן עם החזרה הן בלתי תלויות וההסתברות להצלחה $\left(\frac{a}{a+b}\right)$. נסמן Y = התפלגות מס' ההוצאות: $Y\sim G\left(\frac{a}{a+b}\right)$.

שאלה - $X,Y\sim G(P)$ ב"ת.

הוכיחו - $P(X=k\mid X+Y=n)$ היא התפלגות אחידה.

תשובה - $= \frac{P(\{X=k\}\cap\{X+Y=n\})}{P(X+Y=n)} =$

$$\overset{(*)}{=} \frac{P(X=k)\cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \quad \text{ב"ת}$$

צריך למצוא $P(X+Y=n) \Leftarrow P(X+Y=n)=\sum_{k=1}^{n-1}P(X=k,Y=n-k)$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}P(X=k)\cdot P(Y=n-k) \underset{X,Y\sim G(P)}{=} \sum_{k=1}^{n-1}(1-P)^{k-1}\cdot P\cdot(1-P)^{n-k-1}\cdot P$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}P^2\cdot(1-P)^{n-2} = (n-1)\cdot P^2\cdot(1-P)^{n-2}$$

נציב ב- $(*)$ $\Leftarrow \frac{\cancel{(1-P)^{k-1}}\cdot \cancel{P}\,\cancel{(1-P)^{n-k-1}}\cdot\cancel{P}}{(n-1)\cdot\cancel{P^2}\cdot\cancel{(1-P)^{n-2}}} = \frac{1}{n-1} \Rightarrow X\mid X+Y=n\sim U(1,n-1)$

התפלגות היפר גיאומטרית

$X\sim Hyp(n,A,B)$

X הוא מס' האובייקטים בבחירת n כדורים. משק בין A אובייקטים ו-B אחרים.

נסמן - $N=A+B$.

$$P(X=a)=\frac{\binom{A}{a}\binom{B}{n-a}}{\binom{N}{n}},\quad E(X)=n\cdot\frac{A}{N},\quad V(X)=\frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\left(\frac{A}{N}\right)\left(1-\frac{A}{N}\right)$$

שאלה - 4 לבנים, 4 שחורים. מוציאים באקראי מהכד 4 כדורים ללא החזרה.

אם מקבלים 2 לבנים ו-2 שחורים הניסוי מסתיים.

מה ההסתברות לחזור על הניסוי בדיוק n פעמים?

תשובה - תחילה נחשב את ההסתברות להצלחה בניסוי בודד (הוצאה של 4 כדורים)

במקרה כזה $Y\sim Hyp(4,\underset{A}{4},\underset{B}{4})$, אנו רוצים - $P(Y=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}}=\frac{18}{35}$

נסמן עתה ב-X את מס' ההוצאות עד להצלחה ראשונה.

$X\sim Geo\left(\frac{18}{35}\right) \Rightarrow P(X=n)=\left(1-\frac{18}{35}\right)^{n-1}\cdot\frac{18}{35}$

הסתברות – תרגול - 3-24/4

שאלה - א) מהי תוחלת מס הילדים, X, לזוג הורים שממשיכים להתרבות עד לקבלת 2 מינים שונים של ילדים.

ב) מולידים עד בן ראשון. תוחלת מס הבנים במשפחה, V, ותוחלת מס הבנות, W, במשפחה.

תשובה - א) נסמן ב-Y את מס הילדים הנוספים לאחר הילד הראשון עד להולדת ילד שמינו שונה.

$$Y\sim G(\tfrac{1}{2}) \Rightarrow E(Y)=\frac{1}{1/2}=2$$

$$X=Y+1 \Rightarrow E(X)=E(Y+1)=E(Y)+1=3$$

$$V(Y)=\frac{1/2}{(1/2)^2}=2 \quad , V(X)=V(Y+1)=V(Y)$$

ב) לכל משפחה בדיוק בן אחד ולכן $V=1$. $E(V)=1$.

מס הילדים $= X = W+1$

$$W+1\sim G(\tfrac{1}{2}) \Leftarrow X\sim G(\tfrac{1}{2})$$

$$E(W)+1=E(W+1)=\frac{1}{1/2}=2 \Rightarrow E(W)=1$$

שאלה - 100 תושבים. 50 דוברי אנג', 30 שקרנים, 20 מסרבים לענות.

שואלים 4 תושבים.

א) התפלגות ותוחלת מס התשובות הנכונות שקיבלתם X.

ב) מהי תוחלת מס התשובות הנכונות Y בהנחה ששניים סרבו לענות.

תשובה - $n=4$, $A=$ #דוברי אנג', $B=$ #שקרנים+מסרבים לענות.

א) $X\sim Hyp(4,50,50)$

$$E(X)=4\cdot\left(\frac{50}{50+50}\right)=2$$

ב) $A=$ #דוברי אנג' $=50$, $B=$ #שקרנים $=30$

$$Y\sim Hyp(2,50,30)$$

2 סרבו לענות לכן יש $4-2=2$ ניסויים.

ההתפלגות הבינומית השלילית

מס בסדרת ניסויי ברנולי עד הכישלון ה-r+ שהסיכוי להצלחה הוא P.

$$P(X=k)=\binom{r+k-1}{k}(1-p)^r\cdot p^k ,$$

k+r כישלון

או r-1 (אותו הדבר)

הסתברות – תרגיל - שעור-4

שאלה - הצלחה p. ההסתברות לקבל r הצלחות בסה"כ לפני שמקבלים m כישלונות.

תשובה - $$P(x=k)=\binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r$$

לכן ההסתברות לקבל r הצלחות לפני הכישלון ה-m.

$$P(x<m)=\sum_{k=0}^{m-1}P(x=k)=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r$$

הסתברות – תרגול – 3/4 – 1

שאלה - מטילים קוביה N פעמים.

X = מס' הפעמים שהתקבל 6

Y = -"- -"- -"- 5

חשבו - $Cov(X,Y)$

פתרון - $Cov(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$

$$X\sim Bin(N,\tfrac{1}{6}) \quad , \quad Y\sim Bin(N,\tfrac{1}{6})$$

המשתנה המקרי X+Y מתפלג: X+Y סופר את מס' הפעמים שהתקבלו התוצאות 5 או 6.

$$X+Y\sim Bin(N,\tfrac{1}{3})$$

$$V(X)=N\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=V(Y)$$

$$V(X+Y)=N\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

עפ"י ההגדרה: $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y)=\frac{V(X+Y)-V(X)-V(Y)}{2}$$

$$=\frac{N\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}-N\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}-N\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{2}=\frac{-N}{36}$$

שאלה - $Y=n-X=f(X)$ מקדם המתאם הוא 1-. מצאו את מקדם המתאם.

מקדם המתאם: $\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\underbrace{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}}_{\text{לינארי}}}$

$$\Rightarrow Cov(X,Y)=Cov(X,n-X)=Cov(X,n)-1\underbrace{Cov(X,X)}_{V(X)}$$

$$=[E[n\cdot X]-E[n]\cdot E[X]]-V(X)=[n\cdot E[X]-nE[X]]-V(X)$$

$$=V(Y)=V(n-X)=V(-X)=(-1)^2\cdot V(X)=V(X)$$

$$\Rightarrow \frac{-V(X)}{\sqrt{V(X)\cdot V(X)}}=-1$$

שאלה - N צעדים. P ימינה והסיכוי $q=1-p$ שמאלה.

X= המס' עליו יהיה הרובוט אחרי N צעדים. מצאו את ההתפלגות של X.

פתרון - נסמן Y = מס' הצעדים שהרובוט צעד ימינה.

Z = -"- -"- -"- -"- שמאלה.

$$Y\sim Bin(N,P) \quad , \quad Z\sim Bin(N,P)$$

הסתברות - תרגיל - 2-3/4

$\leftarrow \quad Z = N - Y$

$k<0: P(X=k)=0, \quad P(X=K) = P(Y-Z=K) = P(Y-(N-Y)=K)$

$= P(2Y-N=K) = P\left(Y = \frac{K+N}{2}\right)$

$= \binom{N}{\frac{K+N}{2}} p^{\left(\frac{K+N}{2}\right)} \cdot (1-p)^{N-\frac{K+N}{2}}$

$= \binom{N}{\frac{K+N}{2}} p^{\left(\frac{K+N}{2}\right)} \cdot q^{\left(\frac{N-K}{2}\right)}$

שאלה - התפלגות - פואסון $X \sim Pois(\lambda)$

$P(X=K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}$

$E(X) = V(X) = \lambda$

$P(\lambda) = \lim_{n \to \infty} B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

שאלה - נזלת בשנה היא פואסון אם $\lambda=5$. $\leftarrow$ 5 פעמים בשנה יהיה לאדם נזלת.

תרופת פלא $\Leftarrow \lambda=3$. אבל 75% ואצל 25% אין השפעה.

פלוני $\Leftarrow$ 2 נזלת. מה ההסתברות שפלוני הוא מ-75% שהתרופה השפיעה עליהם.

$P(\text{נדבק עם }75\%\text{ האחוזים} \mid \text{פעמיים נזלת}) = \frac{P(\{\text{נדבק עם }75\%\} \cap \{\text{פעמיים נזלת}\})}{P(\{\text{פעמיים נזלת}\})} = \frac{P(\text{נזלת }2 \mid \text{נדבק }75\%,\ \lambda=3) \cdot P(\text{נדבק }75\%)}{P(\text{פעמיים נזלת})}$

$= \frac{P(X=2 \mid \lambda=3) \cdot 0.75}{P(X=2 \mid \lambda=3) \cdot 0.75 + P(X=2 \mid \lambda=5) \cdot 0.25} \leftarrow$ במכנה: $P(\text{פעמיים נזלת} \mid \text{שייך }75\%) \cdot P(\text{שייך }75\%) + P(\text{פעמיים נזלת} \mid \text{שייך }25\%) \cdot P(\text{שייך }25\%)$

$= \frac{\frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} \cdot 0.75}{\left(\frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} \cdot 0.75\right) + \left(\frac{e^{-5} \cdot 5^2}{2!} \cdot 0.25\right)} = 0.8886$

שאלה - במרכזייה טלפוני - $P(\lambda)$, סיכוי למצוא P.

התפלגות מס׳ השיחות שנענו - דקה.

פיתרון - $X=$ מס׳ השיחות שהגיעו. $X \sim Pois(\lambda)$ נתון.

$Y=$ מס׳ השיחות שנענו.

$Y|X=K$ מתפלג. בינומי. $Bin(K,p)$

$y \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad Pois(Y=y) = \sum_{k=y}^{\infty} Pois(Y=y \mid X=k) \cdot Pois(X=k) = \sum_{k=y}^{\infty} \binom{k}{y} p^{y} (1-p)^{k-y} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

$0, \dots, y-1 \Leftarrow$ הביטוי בסכום שווה לאפס

$= \frac{p^y e^{-\lambda}}{y!} \sum_{k=y}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot q^{k-y}}{(k-y)!}$