# פתרון תרגיל בית 9 – טופולוגיה

**<u>שאלה 1</u>**

הוכיחו כי $\mathbb{R}$ אינו הומאומורפי ל- $\mathbb{R}^n$ עבור $n>1$.

**<u>פתרון</u>**

נראה כי לכל $n>1$, $\mathbb{R}^n$ לא הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$. אם נזרוק נקודה מ- $\mathbb{R}$ נקבל מרחב שאינו קשיר. אמנם, עבור $b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{R}\setminus\{b\}=(-\infty,b)\cup(b,\infty)$. לעומת זאת לכל $n>1$, אם נזרוק נקודה מ $\mathbb{R}^n$ נקבל מרחב קשיר מסילתית ולכן קשיר.

הסבר: $\mathbb{R}^n-\{a\}$ קשיר מסילתית לכל $n>1$ ולכל $a\in\mathbb{R}^n$. נניח $x,y\in\mathbb{R}^n-\{a\}$ אם הקו הישר המחבר ביניהן לא עובר דרך $a$ אז המסילה הסטנדרטית מקשרת בין $x$ ו- $y$ גם ב- $\mathbb{R}^n-\{a\}$.

אחרת, מכיוון ש $n>1$ ברור שקיים ישר שונה (מהישר המחבר $x$ ו- $y$) שעובר דרך $x$. ניקח נקודה הנמצאת עליו ושונה מ $x$ ונסמנה $z$. ברור שהמסילה הסטנדרטית מקשרת בין $x$ ו- $z$

($a$ לא נמצאת על ישר זה). כמו כן, $a$ לא נמצאת על הישר המחבר בין $z$ ו- $y$ ולכן קיימת מסילה (הסטנדרטית) המחברת בין $y$ ל- $z$. אם יש מסילה ב $\mathbb{R}^n-\{a\}$ בין $x$ ל $y$ וכן מסילה בין $y$ ל $z$ אז יש גם מסילה בין $x$ ל- $z$ (שרשור של המסילות). היחס הוא יחס שקילות ובפרט טרנזיטיבי.

כעת, אם היה קיים הומיאו' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אז גם $f|_{\mathbb{R}^n\setminus\{a\}}:\mathbb{R}^n\setminus\{a\}\to\mathbb{R}\setminus\{f(a)\}$ היה הומיאו'. אבל כפי שתיארנו המרחב השמאלי קשיר ואילו הימני אינו קשיר, בסתירה לכך שהומיאומורפיזם שומר על קשירות.

מש"ל

**<u>שאלה 2</u>**

הוכיחו או הפריכו:

א. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}$;

ב. $(2,5)\cup(7,8)\cong(-3,-1)\cup\{0\}$.

**<u>פתרון</u>**

א. לא קיים המיאו' שכן העוצמות של המרחבים שונות.

ב. המרחבים אינם הומיאומורפיים שכן הומאימורפיזם מעביר מרכיב קשירות למרכיב קשירות (הוכחנו זאת בתרגול). בשני המרחבים שני מרכיבי קשירות. לו היה קיים הומיאו' אז התמונה של מרכיב הקשירות $\{0\}$ היתה $(2,5)$ או $(7,8)$ (אלה מרכיבי הקשירות של המרחב השני). אבל זה כמובן בלתי אפשרי וסותר את החד-ערכיות של הפונקציה.

מש"ל

## <u>שאלה 3</u>

<u>תרגיל (ממבחן)</u>

יהי $A\subseteq\mathbb{R}$. הראו שאם $A$ צפוף ב $\mathbb{R}$ ו $A\neq\mathbb{R}$ אז $A$ איננו קשיר.

**<u>פתרון</u>**

נניח $z\in\mathbb{R}\setminus A$ נקודה במשלים.

נסמן $A_1:=(-\infty,z)\cap A,\quad A_2:=(z,\infty)\cap A$.

בודקים ש $A=A_1\cup A_2$ פירוק טופולוגי של $A$.

נימוק: ברור $A_1\cap A_2=\varnothing$ (כי $(-\infty,z)\cap(z,\infty)=\varnothing$ ).

$A_1:=(-\infty,z)\cap A, A_2:=(z,\infty)\cap A$ קבוצות פתוחות ב $A$ ע"פ הגדרת טופולוגית תת מרחב.

$A_1:=(-\infty,z)\cap A\neq\varnothing,\quad A_2:=(z,\infty)\cap A\neq\varnothing$ כי $A$ צפוף ב $\mathbb{R}$.

מש"ל

## **שאלה 4**

יהי $(X,\tau)$ מרחב טופולוגי ויהי $A\subseteq X$ תת מרחב קשיר. הוכיחו שלכל תת מרחב $B\subseteq X$, אם $A\subseteq B\subseteq cl(A)$ אזי $B$ קשיר.

## **פתרון**

נרצה להשתמש במשפט שלפיו אם $A\subseteq B$ שני תתי מרחבים כך ש-$A$ צפוף ב-$B$ וגם $A$ קשיר, אזי $B$ קשיר.

נרצה להראות $cl_B(A)=B$. מתקיים $cl_B(A)=cl(A)\bigcap B$ וברור כי $cl(A)\bigcap B=B$. לכן $A$ צפוף ב-$B$ ומקבלים הדרוש.

מש"ל

## **שאלה 5**

יהי $(X,\tau)$ מרחב טופולוגי עם התכונה הבאה: לכל נקודה קיימת סביבה קשירה מסילתית. הוכיחו שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה פתוחה. הסיקו שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא גם קבוצה סגורה.

**הערה**: איך מוכיחים שקבוצה במ"ט היא פתוחה?

תהי $A\subseteq X$ אזי $A$ פתוחה אמ"מ $A=\operatorname{int}(A)$. כלומר, $A$ פתוחה אמ"מ לכל $a\in A$ קיימת $U\subseteq X$ פתוחה כך ש-$a\in U\subseteq A$.

שמנו לב, שחלקכם לא משתמש בעובדה הזאת, אלא עובר דרך הלמה השימושית. כמובן שאין בכך שום טעות, אך זה עלול להאריך את הדרך, ובפתרונות שלנו החלטנו לקצר ☺

## **פתרון**

יהי $C$ מרכיב קשירות מסילתית. נרצה להראות שזו קבוצה פתוחה. יהי $x\in C$ ונראה שקיימת סביבה $U$ של $x$ כך ש-$x\in U\subseteq C$. לפי הנתון קיימת סביבה קשירה מסילתית $V$ של $x$. נרצה להראות שזו הסביבה הדרושה. נותר להראות ש-$V\subseteq C$ אך זה נובע מהגדרה של מרכיבי הקשירות המסילתיים.

כעת נראה שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא גם קבוצה סגורה.

נציג שתי דרכים:

<u>דרך א'</u>

יהי $C$ מרכיב קשירות מסילתית. הוא קשיר ולכן מוכל במרכיב קשירות כלשהו $D$. ראיתם בהרצאה שכל מרכיב קשירות מתפרק לאיחוד זר של מרכיבי

קשירות מסילתית. נניח בשלילה שיש יותר ממרכיב קשירות מסילתית אחד ב- $D$. נסמן $D=\bigcup_i C_i$ כאשר אחד מה- $C_i$ הוא $C$. כעת, מכיון שכל מרכיב קשירות מסילתית פתוח, נקבל ש- $D\setminus C$ פתוח (כאיחוד של פתוחים) ולכן $C$ סגור ב- $D$.

כלומר, מצאנו ב- $D$ קבוצה סגוחה לא טריוויאלית בסתירה לקשירות של $D$. לכן יש ב- $D$ רק מרכיב קשירות מסילתית אחד, ולכן $D=C$. אך מרכיבי הקשירות הם סגורים ולכן $C$ סגור.

<u>דרך ב'</u>

יהי $P=\left\{P_i : i\in I\right\}$ אוסף מרכיבי הקשירות המסילתית של $X$. יהי $P_{i_0}$ אחד ממרכיבי הקשירות המסליתית. נראה שהוא סגור. מתקיים $X=\bigcup_{i\in I} P_i = P_{i_0}\cup\left(\bigcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} P_i\right)$ (שימו לב שזהו איחוד זר!). מכיוון שמרכיבי הקשירות המסילתית הם פתוחים, נקבל ש- $\bigcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} P_i$ פתוחה ולכן $P_{i_0}$ סגורה (כמשלים של פתוחה).

מש"ל