מבוא לאלגברה לינארית, מועד ב', תש"ף

מרצה: תמר בר-און.
מתרגלת: אלכסנדרה סימנובסקי.
משך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט.
עליכם לענות על כל השאלות. בכל שאלה יש להראות את החישובים הנצרכים ודרך הפתרון.

1. נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} ax+ay+az=2a \\ x+ay+az=a-1 \\ (1-a)x+(a+3)z=a^2-a-10 \end{cases}$$

(א) (15 נקודות) קבעו לאילו ערכי a יש למערכת: פתרון יחיד, אין פתרון, אינסוף פתרונות.
פתרון: נייצג את המערכת במטריצה ונדרג.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a & 2a \\ 1 & a & a & a-1 \\ 1-a & 0 & a+3 & a^2-a-10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a-1 \\ a & a & a & 2a \\ 1-a & 0 & a+3 & a^2-a-10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a-1 \\ 0 & a-a^2 & a-a^2 & 3a-a^2 \\ 1-a & 0 & a+3 & a^2-a-10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-(1-a)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a-1 \\ 0 & a-a^2 & a-a^2 & 3a-a^2 \\ 0 & -a\,(1-a) & 3+a^2 & 2a^2-3a-9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a-1 \\ 0 & a-a^2 & a-a^2 & 3a-a^2 \\ 0 & 0 & 3+a & a^2-9 \end{array}\right)$$

ובמידה ו $3+a$ ו $a-a^2$ שונים מאפס, כלומר $a\neq 0,1,-3$, נקבל מטריצה מדורגת ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן יהיה פתרון יחיד במקרה זה. נבדוק את שאר המקרים בנפרד:

- עבור $a=0$ נקבל את המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right)$ שאחרי החלפת שורה 2

עם 3 עוברת למערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ שהיא מדורגת ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (השלישי) ולכן יש אינסוף פתרונות במקרה זה.

- עבור $a=1$ נקבל את המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right)$ שיש בה שורת סתירה (השורה השניה) ולכן אין פתרון במקרה זה.
- עבור $a=-3$ נקבל את המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -12 & -12 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ שהיא מדורגת ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (השלישי) ולכן יש אינסוף פתרונות במקרה זה.

(ב) (5 נקודות) במקרה של פתרון יחיד, מצאו את הפתרון היחיד של המערכת, כביטוי עם a.

פתרון: נמשיך את הדירוג מהסעיף הקודם ונתחייס רק למקרים ש $a \neq 0,1,-3$ (אלו המקרים שיש פתרון יחיד).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a-1 \\ 0 & a-a^2 & a-a^2 & 3a-a^2 \\ 0 & 0 & 3+a & a^2-9 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{3+a} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a-1 \\ 0 & a-a^2 & a-a^2 & 3a-a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{a-a^2} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a-1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3-a}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & a-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a-1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-a}{1-a} - a + 3 \\ 0 & 0 & 1 & a-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - aR_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & -a^2+4a-1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-a}{1-a} - a + 3 \\ 0 & 0 & 1 & a-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - aR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -a\left(\frac{3-a}{1-a}\right) + a - 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-a}{1-a} - a + 3 \\ 0 & 0 & 1 & a-3 \end{array}\right)$$

ולכן הפתרון היחיד הוא $x_1 = -a\left(\frac{3-a}{1-a}\right)+a-1,\ x_2 = \frac{3-a}{1-a}-a+3,\ x_3 = a-3$

2. יהיו $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(א) חשבו את A^{-1}.

פתרון : נחשב לפי אלגוריתם :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to -\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{array}\right)$$

ולכן

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{array}\right)$$

(ב) מצאו מטריצה $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך $A^{-1}C = B$.
פתרון : אם C קיימת אזי את המשוואה $A^{-1}C = B$ ניתן לכפול ב A מימין ולקבל כי $C = AB$. מצד שני C קיימת כי עבור $C = AB$ מתקיים כי $A^{-1}C = A^{-1}AB = B$ ולכן קיימת C אחד ויחידה שפותרת את המשוואה שבשאלה והיא AB נחשב את הכפל ונמצא כי

$$C = AB = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

3. תהי

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

(א) (10 נקודות) חשבו את הפולינום האופייני והערכים העצמיים של A.
פתרון : לפי הגדרה, הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = |xI - A| = \left|\left(\begin{array}{ccc} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-2 & -3 \\ 0 & 0 & x-2 \end{array}\right)\right| = (x-1)(x-2)^2$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מכך שדטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלת איברי האלכסון. מכאן קל לראות כי $1,2$ הם הע״ע של A.

(ב) (10 נקודות) קבעו האם A לכסינה. במידה וכן, מצאו P הפיכה וD אלכסונית כך ש$P^{-1}AP=D$.

פתרון: נחשב את הרחב העצמי של 2 שהוא $V_2=N(A-2I)$. כלומר נחשב את מרחב האפס של $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. כיוון שהמטריצה כבר מדורגת, קל לראות

$$V_2=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

שהמימד שלו 1. לכן עבור ע״ע 2 נקבל כי הר״א שלו הוא 2 ואילו הר״ג שלו הוא 1. מכאן ש A אינה לכסינה.

4. תהי

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) (15 נקודות) מצאו מימד למרחב השורות של A, מרחב העמודות של A, ומרחב האפס של A.
במידה והמימד שונה מאפס, מצאו בסיס למרחב.

פתרון: נדרג את A

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-4R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-\frac{7}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן מרחב האפס של A הוא $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ (אין משתנים חופשיים) שמימדו הוא 0.

בסיס למרחב השורות יהיה $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ (שורות שונות מאפס במטריצה המדורגת) ולכן מימדו הוא 2.

בסיס למרחב העמודות יהיה $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ (עמודות של A שיש בהם איבר מוביל במטריצה מדורגת) ולכן מימדו הוא 2.

(ב) (5 נקודות) קבעו האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ שייך למרחב העמודות של A. הוכיחו את קביעתכם.

פתרון: זה שקול לשאלה האם יש פתרון למערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן, נדרג ונבדוק:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{7}{3}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 + \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

לכן השורה השלישית היא שורת סתירה ולכן אין פתרון למערכת ולכן $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אינו שייך למרחב העמודות של A.

5. יהי $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(א) מצאו שני וקטורים שונים שמאונכים ל-v, ושני וקטורים שונים שאינם מאונכים ל-v.

פתרון: למשל וקטורים מאונכים ל v: $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ כי

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0$$

וגם

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0$$

למשל וקטורים שאינם מאונכים ל v: $v, 2v$ כי

$$\langle v, v \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6 \neq 0$$

וגם

$$\langle v, 2v\rangle = 2\langle v, v\rangle = 2\cdot 6 = 12 \neq 0$$

(ב) מצאו וקטור ב$span(\{v\})$, כלומר מהצורה αv, כך שהנורמה שלו היא 1.
פתרון: עבור $\alpha = \frac{1}{\|v\|}$ נקבל כי αv עם נורמה שווה 1 כי

$$\|\alpha v\| = |\alpha|\cdot\|v\| = \left|\frac{1}{\|v\|}\right|\cdot\|v\| = 1$$

מפורשות: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{6}$ (לפי החישוב מסעיף קודם) ולכן

$$\alpha v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

כנדרש.

נוסחאות עזר:

1. חישוב דטרמיננטה לפי מינורים: פיתוח לפי שורה i מחושב $|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{i,j}|M_{i,j}|$
2. הזוית θ בין וקטורים u, v מוגדרת ע"י $\cos\theta = \frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|\cdot\|u\|}$ (כאשר $\theta\in[0,\pi]$)
3. הטלה של וקטור v על w (ניתן גם לומר על: $W = \text{span}\{w\}$) הוא $\pi_W(v) = \pi_w(v) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}w$.