ביאה: 101 חדר 507

① סימנים עספיקה

$\{\}$ = קבוצת איברים, יכולה להיות סופית או אינסופית

למשל:

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

בנוסף אנחנו יכולים לתאר תנאי על האיברים בקבוצה.

{תנאי שהוא מקיים | איבר}

למשל: $= \{n \mid n>0,\ n=2k,\ k$ מספר ~~טבעי~~ שלם$\}$ = קבוצת המספרים הזוגיים החיוביים

$$=\{2,4,6,8,10\ldots\}$$

* על קבוצות ניתן לתאר את היחסים הבאים:

$\in$ שייך $\subset$ מוכל

$\notin$ לא שייך $\subseteq$ מוכל או שווה

$\not\subset$ לא מוכל.

דוג: *אם יש לנו איבר אחד בלבד, ואנו רוצים לבחון האם הוא שייך לקבוצה או לא נשתמש בסימונים: $\in$, $\notin$

למשל:

$$1\in A$$

$$10\notin A$$

* אם יש לנו קבוצה של איברים שמרכיבים יותר מאיבר אחד נשתמש בסימונים: $\subset$, $\subseteq$, $\not\subseteq$, $\not\subset$

למשל:

$\{1,2\}\subset A$ או $\{1,2\}\subseteq A$

$\{1,5,10,20\}\not\subset A$

② קטעים פתוחים וסגורים:

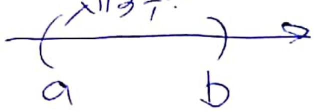
א. קטע סגור מכיל את הקצוות שלו

כל המספרים בין a ל-b עם הקצוות

$$[a,b]=\{x \mid a\le x\le b\}$$

ב. קטע פתוח הוא קטע שלא מכיל את הקצוות שלו

כל המספרים בין a ל-b בלי הקצוות



$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

ג. קטע חצי פתוח לא מכיל את אחד הקצוות שלו:

$$[a,b)=\{x \mid a\le x<b\}$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x\le b\}$$

<u>דוגמאות חשובות של מספרים</u>

$\mathbb{N}$ = מספרים טבעיים, כלומר כל השלמים החיוביים:

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$$

$\mathbb{Z}$ = כל המספרים השלמים, כלומר כל הטבעיים, אפס, וכל השלמים השליליים:

$$\mathbb{Z}=\{\dots-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$$

$\mathbb{Q}$ = כל המספרים הרציונליים

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$$

<u>למשל:</u> $\frac{5}{7}$ רציונלי כי $5,7\in\mathbb{Z}$

③ $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ כי כל מספר שלם a אפשר להציג
כי $\frac{a}{1}\in\mathbb{Q}$ לפי ההגדרה.

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$$

<u>הערה:</u> $\mathbb{Q}$ הוא שדה, כלומר מקיים את כל האקסיומות של שדה

$\mathbb{R}$ = מספרים ממשיים
הוא מכיל את כל הרציונלים ואת כל האי רציונלים.

<u>הגדרה:</u> מספר אי רציונלי הוא מספר ממשי שאינו רציונלי, כלומר מספר שלא ניתן להציג כמנה של שני שלמים.

בהצגה של מספר אי רציונלי כמספר עשרוני יש צורך להוסיף מספר אינסופי של ספרות ללא מחזוריות כלשהי.

למשל $\pi=3.14159265\ldots$

מתקיים: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

<u>לסיכום:</u> ב-$\mathbb{R}$ מתקיימות התכונות הבאות:

א. $a\le b \iff a+c\le b+c$ לכל c

ב. $a\le b \iff a\cdot c\le b\cdot c$ לכל $c>0$

ג. אם $a\le b$ וגם $c\le d$ אזי $a+c\le b+d$

<u>הגדרות:</u> יהי $A\subseteq\mathbb{R}$

1. נאמר ש-$M\in\mathbb{R}$ הוא המקסימום של A אם הוא האיבר הגדול ביותר של A, סימון $\max A=M$
פורמלית: $\max A=M$ אם $\forall a\in A: a\le M$

2. נאמר ש-$m\in\mathbb{R}$ הוא המינימום של A אם הוא האיבר הקטן ביותר שלה, סימון: $\min A=m$

4) מינימום: $m = \min A$ אם $m \in A$ וגם

$$\forall a \in A : a \geq m$$

הערה: $\max/\min$ לא תמיד קיים.

דוגמאות:

1. $A = \{1,2,3,4,5\}$

$\max A = 5$

$\min A = 1$

2) $B = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

$\max B = 1$

$\min B = 0$

3. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \leq 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\} = [-1,4]$

$\max C = 4$

$\min C = -1$

4. $D = [0,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\min D = 0$

$\max D =$ לא קיים

המשך הגדרות:

3) נאמר ש $S \in \mathbb{R}$ הוא "חסם מלעיל" של A אם

$\forall a \in A : a \leq S$

4). נאמר ש- $S \in \mathbb{R}$ הוא "חסם מלרע" של A אם

$\forall a \in A : a \geq S$

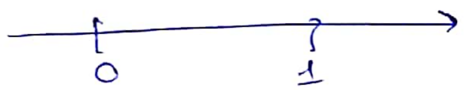
5 דוגמאות:

1. $A=(0,1)$

חסמים מלעיל הם כל המספרים ≥ 1

חסמים מלרע הם כל המספרים ≤ 0.

2. $A=[0,1]$



החסמים כמו ב-1

המשך הגדרה

5) נאמר ש $K\in\mathbb{R}$ הוא "חסם עליון" של A (סופרמום) אם K הוא חסם מלעיל וגם הוא המינימלי מבין החסמים מלעיל של A.

סימון: $\sup A=K$

6) נאמר ש $K\in\mathbb{R}$ הוא "חסם אחתון" של A אם הוא חסם מלרע (הוא המקסימלי מבין כל החסמים מלרע של A.

סימון: $\inf A=K$

משפט: אם ל-A יש חסם אחתון/עליון אז הוא יחיד.

---

* כפי שמשמע לפי ההגדרה, של חסם אחתון/עליון הוא מאוד מסורבל, כי גם אם ברור לנו שזה חסם אחתון/עליון, לא מובן איך נוכיח. בשביל זה יש את המשפט הבא, שהוא מהווה כלי יעיל להוכחת חסם אחתון/עליון:

משפט: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל ומלרע סופי

1. M חסם עליון של A $\Longleftrightarrow$ M חסם מלעיל של A וגם

$$\forall\varepsilon>0\ \exists a\in A: M-\varepsilon<a$$

2. m חסם תחתון של A ⟺

m חסם מלרע של A וגם

$\forall \varepsilon>0\ \exists a\in A : a< m+\varepsilon$

במילים: M הוא חסם עליון אם הוא חסם
מלעיל וגם אין חסם מלעיל הקטן ממנו.

דוגמאות:

1. $A=(0,1)$

$\sup A=1$

$\inf A=0$

$\max A, \min A$ לא קיימים.

2. $A=[0,1]$

$\sup A=1=\max A$

$\inf A=0=\min A$

3. $A=[0,1)$

$\sup A=1$

$\max A =$ לא קיים

הערה שימושית

1. אם ל- $A\subseteq\mathbb{R}$ יש מקסימום אזי הוא גם הסופרמום (ומתקיים):

$\sup A=\max A$

ולכן אם הוכחנו שמספר כלשהו ב- A הוא $\max A$, אזי אוטומטית מצאנו את הסופרמום.

2. אם ל- A יש סופרמום שלא בתוכה אזי אין לקבוצה מקסימום.

הערה: אותו דבר גם לגבי $\min A$, וגם לגבי האינפימום של A.

תרגיל: נגדיר קבוצה

$$A=\{5+\frac{2}{3n} \mid n\in\mathbb{N}\}$$

נוכיח $\max A = \sup A = 5\frac{2}{3}$

$\inf A = 5$

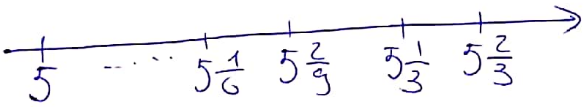
ל- A אין מינימום.

~~פתרון~~ פתרון:

נרשום את הקבוצה במפורש:

$$A=\{5\frac{2}{3}, 5\frac{1}{3}, 5\frac{2}{9}, 5\frac{1}{6},\dots\}$$

מכאן "קל" לראות



שכל האיברים ב- A קטנים או שווים ל- $5\frac{2}{3}$

ולכן אם נראה $\max A = 5\frac{2}{3}$ אזי לפי הטענה השימושית מהד"מ: $\inf A = 5\frac{2}{3}$

מצד שני, האיברים הולכים ומתקרבים ל- 5 ולכן נראה $\inf A = 5$

בנוסף, קל לראות ש- $\inf A = 5\notin A$ ולכן לפי הטענה השימושית אין ל- A מינימום.

<u>שלב 1</u>

נראה ש- $\max A = 5\frac{2}{3}$

צ"ל שני דברים:

1. $5\frac{2}{3}\in A$ (ברור לפי הגדרת הקבוצה)
2. $\forall a\in A: a\le 5\frac{2}{3}$

נסמן $a = 5+\frac{2}{3n}$ ולכן מהד"מ

$$5+\frac{2}{3n}\le 5\frac{2}{3}$$

③ הסבר: $\forall n\geq 1$:

$$3n\geq 3$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{2}{3n}\leq\frac{2}{3}\quad /+5$$
$$\Downarrow$$
$$5+\frac{2}{3n}\leq 5+\frac{2}{3}$$
$$\Downarrow$$
$$\max A=5\tfrac{2}{3}=\sup A$$

(סוף שימושית, חלק א')

<u>שלב ב</u>

(ראה) $\inf A=5$.

צ"ל שני דברים:

① 5 הוא חסם מלרע של A,
כלומר $\forall a\in A: a\geq 5$.

(סימן) $a=5+\frac{2}{3n}$

לכן מתקיים

$$5+\frac{2}{3n}\geq 5$$

<u>הסבר</u>: $\frac{2}{3n}>0\ /+5 \Leftarrow 5+\frac{2}{3n}>5$

② $\forall\varepsilon>0\ \exists a\in A: 5+\varepsilon>a$.

(כלומר $\varepsilon>0$ כלשהו שרירותי, לצורך (נמצא <u>$a\in A$</u> אשר מקיים את אי השוויון: $5+\varepsilon>a$

(יהי $\varepsilon>0$ (בחרנו ε), (ראה שלכוונו קיים $a\in A$
כך ש $5+\varepsilon>a$. (כדי לקרוא שמה שטוען
קיים דברים נמצא לפניו אותו).

(סימן $a=5+\frac{2}{3n}$, ונשים לב ש- a
תלוי ב- n, לכן מספיק למצוא $n\in\mathbb{N}$ עבורו:

$$5+\varepsilon>5+\frac{2}{3n}$$
$$\Downarrow$$
$$\varepsilon>\frac{2}{3n}$$

11

$$n > \frac{2}{3\varepsilon}$$

קבלנו שיש n-ים רבים שמקיימים
הוא אי-שוויון ולכן מספיק למצוא
n אחד.

נבחר $n = \lceil \frac{2}{3\varepsilon} \rceil + 1$

נציב אותו ב-a ונקבל:

$$a = 5 + \frac{2}{3(\lceil \frac{2}{3\varepsilon} \rceil + 1)}$$

מקיים את התנאים.

(הצגנו לכל ε ל-a שמקיים הכרח
(מצא בקבוצה A)

$\Downarrow$

$$\inf A = 5$$

<u>סעיף 3</u>

(ראינו ש- $\inf A = 5 \notin A$

ולכן שאין ל-A ~~מקסימום~~ מינימום (סעיף חלק ב' שימושית)

דבר כאינו ש $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$5 + \frac{2}{3n} > 5$$

$\Downarrow$

$$5 \notin A$$

$\Downarrow$

אין ל-A מינימום.

תרגיל: 10

$$A=\left\{\frac{1}{n^2}+2(-1)^n \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathbb{R}$$

מצאו: חסם עליון, תחתון, מינימום ומקסימום (אם קיימים).

פתרון:

$$A=\left\{-1,\ 2\tfrac{1}{4},\ -1\tfrac{8}{9},\ 2\tfrac{1}{16},\ -1\tfrac{24}{25},\ 2\tfrac{1}{36},\dots\right\}$$

אם n זוגי אזי האיברים בסדרה:

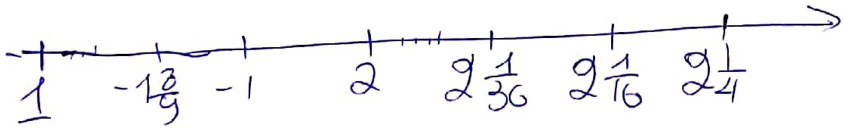
~~$2\frac{1}{4}, \frac{3}{\ }$~~

$$2\tfrac{1}{4},\ 2\tfrac{1}{16},\ 2\tfrac{1}{36}\dots$$

אם n אי זוגי אזי האיברים בסדרה שליליים:

$$-1,\ -1\tfrac{8}{9},\ -1\tfrac{24}{25},\dots$$

ניחוש:



$\max A=\sup A=2\frac{1}{4}$

כי כל האיברים ב-A קטנים או שווים ל-$2\frac{1}{4}$.

$\inf A=\underline{1}$

אין ל-A ~~מקס~~ מינימום (כי $1\notin A$).

הוכחה:

שלב 1

נראה ש- $\max A=2\frac{1}{4}$.

צ"ל שני דברים:

1. $2\frac{1}{4}\in A$ (ברור לפי ההגדרה - הסדרה)
2. $\forall a\in A:\ a\le 2\frac{1}{4}$.

נסמן: $a=\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n$

נחלק למקרים:

א. אם $n=2k+1$ אי זוגי אזי $(-1)^{2k+1}=-1$

ולכן $\frac{1}{(2k+1)^2}+2<0<2\frac{1}{4}$ (כי $0<\frac{1}{(2k+1)^2}\le 1$)

ה) אם $n=2k$ זוגי אז $(-1)^{2k}=1$ ולכן

$$\frac{1}{4k^2}+2 \le 2\frac{1}{4}$$

כי: אם $k\ge 1$ אז $k^2 \ge 1$ ⇐

⇐ $4k^2 \ge 4$ ⇐ $\frac{1}{4k^2} \le \frac{1}{4}$ $/+2$ ⇐

$$2+\frac{1}{4k^2} \le 2\frac{1}{4} \Leftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\max A = 2\frac{1}{4} = \sup A$$

(סוף- סופרימום, חלק א')

<u>סעיף ב'</u>

נראה: ~~$\inf A = 1\ 2$~~ $\inf A = -2$

צ"ל שני דברים:

א. -2 זהו חסם מלרע, כלומר $\forall a\in A: a \ge 2$

<u>תזכורת:</u> (סימון $a=\frac{1}{n^2}+(-1)^n\cdot 2$.

(חלק למקרים:

1. אם $n=2k$ זוגי אז $(-1)^{2k}=1$ ולכן

$$\frac{1}{n^2}+2>0>-2$$

2. אם $n=2k+1$ אז $(-1)^{2k+1}=-1$ ולכן

$$\frac{1}{n^2}-2>-2$$

כי $\frac{1}{n^2}>0$.

$$\Downarrow$$

-2 זהו חסם מלרע של A.

ב. $\forall \varepsilon>0$ ק"מ $\underline{a\in A}$ כך ש

$$-2+\varepsilon>a$$

[illegible] 12

[illegible] $a = \frac{1}{n^2} + (-1)^n 2$

[illegible]

$$a = \frac{1}{(2k+1)^2} + 2$$

[illegible] $a \in A$ [illegible]

$$-2+\varepsilon > a$$

[illegible] k [illegible]

$$-2+\varepsilon > \frac{1}{(2k+1)^2} - 2$$

$\Updownarrow$ [illegible]:

$$\varepsilon > \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$(2k+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$2k+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$2k > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$k > \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} - 1\right)$$

[illegible] $k = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1$ [illegible] a-ב

$$a = \frac{1}{\left(2\left(\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1\right) + 1\right)^2} - 2$$ [illegible]

[illegible]

$$\Downarrow$$

$$\inf A = -2$$

סעיף ג'

נראה ש- $\inf A=-2\notin A$ $\Leftarrow$ אין ל- A מינימום

לפי הסעיף הראשוני חלק ב'.

מתקיים

(הסבירו לעיל, חלקו למקרים n זוגי, n אי זוגי)

$$\frac{1}{n^2}+(-1)^n\cdot 2>-2$$

$$\Downarrow$$

$$-2\notin A$$

$$\Downarrow$$

אין ל-A מינימום.