

# 83-110 אלגברה לינארית להנדסה – מועד ב' תש"ף

מרצים: דר' שפרה רייף, דר' ארז שיינר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות: יש לענות על כל 5 השאלות, יש לנמק ולהוכיח היטב כל טענה.

יש לכתוב את התשובה לכל שאלה על טופס המבחן, מיד לאחר השאלה.

כל שאלה שווה 22 נק' סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).

1. תהי מטריצה ריבועית  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

א. הוכיחו שלמטריצה  $A$  ולמטריצה המשוחלפת  $A^t$  אותם ערכים עצמיים.

ב. הוכיחו שקיימות מטריצות הפיכות  $B, C$  כך ש  $A = B + C$ .



$$2. \text{ תהי } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

א. קבעו לאילו ערכי  $a$  המטריצה  $A$  לכסינה, הוכיחו תשובתכם.

ב. מצאו את כל ערכי  $a$  עבורם קיימת מטריצה הפיכה  $P$  כך ש  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$

והביעו את  $P$  באמצעות  $a$ , או הוכיחו שאין כאלה.





3. תהי  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  מטריצה אורתוגונלית ( $AA^t = I$ ) ותהי  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י  $T\vec{v} = A\vec{v}$ .

$$\text{כמו כן, נתון כי } T(1,0,0) = (0,1,0) \text{ וגם } T(0,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

א. חשבו את כל האפשרויות עבור  $T(0,0,1)$ , הוכיחו תשובתכם.

ב. כמה אפשרויות ישנן לאורך הוקטור  $T(1, a, \sqrt{1-a^2})$  לפי הנורמה הסטנדרטית כאשר  $a \in \mathbb{R}$ ?

הוכיחו תשובתכם.



4. יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית ויהיו שלושה וקטורים שונים  $v_1, v_2, v_3 \in V$  בת"ל.

א. יהי  $w \in V, w \neq 0$  המקיים  $\langle v_i, w \rangle = 0$  לכל  $1 \leq i \leq 3$ .

הוכיחו שהקבוצה  $\{v_1, v_2, v_3, w\}$  בת"ל.

ב. נניח ש  $\langle v_1 + v_2, v_1 \rangle = \langle v_1 - v_3, v_2 \rangle$ , הוכיחו כי הקבוצה  $\{v_1, v_2, v_3\}$  אינה אורתוגונלית.







- א. מצאו מטריצה ריבועית  $A \neq 0$  כך ש  $A^2 = 0$ , או הוכיחו שלא קיימת כזו.
- ב. מצאו העתקה לינארית  $T: V \rightarrow V$  שאינה חח"ע וגם  $\ker T \subseteq \text{Im} T$ , או הוכיחו שלא קיימת כזו.





