תרגיל בית 5 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך יח' כסלו ה'תשע"ז, 18.12.2016.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה וH, K תת-חבורות שלה. נסחו את ההנחות הבאות ע"י משפטים לוגים (עם $\exists$ ו $\forall$) מהצורה $ab = cd$ בלבד.

1. G אבלית.
2. N אבלית.
3. N נורמלית בG.
4. $NH = HN$.

שאלה 2. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה, ואם לא מצא דוגמא נגדית:

1. מחלקה שמאלית היא ת"ח.
2. עבור חבורה ציקלית כל ת"ח היא נורמלית.
3. אם N נורמלית ב G אז $GN = NG$.
4. אם עבור ת"ח $N \leq G$ מתקיים $GN = NG$ אז N נורמלית.
5. אם ת"ח H היא אבלית אז היא נורמלית.
6. אם ת"ח H היא נורמלית אז היא אבלית.

שאלה 3. חשבו את הסימן של התמורות הבאות וקבעו אם הן זוגיות או אי-זוגיות:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$

שאלה 4. תהי $H \leq G$ ת"ח. נגדיר יחס $g \sim g'$ אם $\exists h \in H \ g = g'h$
הוכיחו כי זהו יחס שקילות.
הראו שמחלקות השקילות הן המחלקות $[g] = gH$ וקבוצת המנה היא G/H.

שאלות להגשה

שאלה 5. תארו את הקוסטים השמאליים עבור תת-החבורות הבאות:

1. $\langle 4 \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$.
2. $\langle (123) \rangle \leq S_3$.
3. עבור $G = \langle a \rangle$ מסדר 15 : $\left\langle a^5 \right\rangle \leq G$.

שאלה 6. הוכיחו כי $\langle (1,1) \rangle \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הוא תת-חבורה מאינדקס אינסופי.

שאלה 7. המרכז (center) של חבורה G היא הקבוצה

$$Z(G) = \{x \in G \,|\, \forall g \in G \ gx = xg\}$$

1. הוכיחו כי $Z(G)$ הוא ת"ח של G.
2. הוכיחו כי $Z(G)$ הוא ת"ח נורמלית בG.
3. הוכיחו כי אם $G \lhd N$ אזי $Z(N) = \{x \in N \,|\, \forall y \in N \, xy = yx\}$ היא תת-חבורה נורמלית של G.

שימו לב: אתם יודעים שהמרכז של חבורה הוא תת-חבורה נורמלית ולכן ברור ש $N \lhd Z(N)$.
אבל אנחנו שאלנו אם זה נורמלי בG!

שאלה 8. יהיו $H, K \leq G$ תת-חבורות כך ש $(|H|, |K|) = 1$ הוכיחו כי $H \cap K = \{e\}$.

שאלה 9. מצאו את שתי הספרות האחרונות של $8074 + 23041^{199}$.

שאלה 10. תהי G חבורה ו$H \leq G$ תת-חבורה. נגדיר את הליבה של H בG להיות:

$$Core(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

.

1. הראו כי $Core(H) \subseteq H$.
2. הוכיחו כי לכל $g \in G$, gHg^{-1} היא ת"ח של G. הסיקו כי $Core(H)$ היא ת"ח של G.
3. הוכיחו כי $Core(H)$ נורמלית בG.

שאלות אתגר

את שאלות האתגר אין חובה לפתור, אך מומלץ לפחות לקרוא. אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 11. הוכיחו כי אין פתרון למשוואה $x^3 \equiv 2 \mod 151$.

.

שאלה 12.

1. הוכיחו כי חבורה היא לא איחוד של שתי תת-חבורות אמיתיות. כלומר שאם $G = H_1 \cup H_2$ אז $H_1 = G$ או $H_2 = G$.
2. תהא G חבורה שהיא איחוד של שלוש תת-חבורות אמיתיות, כלומר :

$$G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$$

.

(א) תנו דוגמא לחבורה כזאת (רמז: חבורה מסדר 4).

(ב) הוכיחו כי חיתוך של כל שתי תת-חבורות שווה לחיתוך שלושתן $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

(ג) הוכיחו כי לכל $x \in G$ מתקיים $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

(ד) הסק שהחיתוך הוא ת"ח נורמלית ב-G.

(ה) הראה שהאינדקס של החיתוך ב-G הוא 4.

בהצלחה!