תרגיל בית 7 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ז

הוראות זכרו למלא ולהגיש את הדו"ח.

שאלה 1 (רענון). הוכיחו כי $\mathbb{Z}$ הוא תחום אוקלידי ביחס לפונקציית הערך המוחלט $d(n) = |n|$.

שאלה 2. יהי R תחום שלמות, ותהי פונקציה $d : R \to \mathbb{N} \cup \{0, -\infty\}$ המקיימת $d(0) < d(x)$ לכל $x \neq 0$.

נניח שהיא מקיימת את התנאי הראשון שראינו בכיתה לאוקלדיות: לכל $b \neq 0$ ולכל a קיימים $q, r \in R$ כך ש-$a = qb + r$ וגם $d(r) < d(b)$.

הפונקציה לא בהכרח מקיימת את התנאי השני: $d(a) \leq d(b)$ לכל $a|b$. הוכיחו שבמקרה זה R הוא עדין תחום אוקלידי. הדרכה: הראו שהפונקציה

$$\delta(a) = \min \{d(ax) \,|\, 0 \neq x \in R\}$$

היא פונקציה אוקלידית. במילים: $\delta(a)$ שווה לערך המינימלי של d מבין האיברים הלא אפסים באידאל $\langle a \rangle$.

שאלה 3. יהי $2 \leq n \in \mathbb{N}$. הראו כי $\mathbb{Z}[ni] \subseteq \mathbb{C}$ הוא לא תחום פריקות יחידה.
רמז: ni הוא אי פריק אבל לא ראשוני. היעזרו בנורמה של $\mathbb{Z}[i]$.

שאלה 4. יהי R תחום פריקות יחידה. נגדיר לכל $a \in R \setminus \{0\}$ את $\mu(a)$ להיות מספר הגורמים האי פריקים בפירוק של a ב-R. זה מוגדר היטב מפני ש-R הוא תחום פריקות יחידה.

יהיו $a, b \in R \setminus \{0\}$ כך ש-$a|b$. הוכיחו $\mu(a) \leq \mu(b)$ ושיש שיוויון אם ורק אם $a \sim b$. בפרט, a הפיך אם ורק אם $\mu(a) = 0$.

שאלה 5. יהי $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$. פרקו את $f(x)$ לגורמים ראשוניים מעל החוגים הבאים:

א. $\mathbb{Q}$

ב. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

ג. $\mathbb{R}$

ד. $\mathbb{Z}_5$

שאלה 6. יהי R תחום פריקות יחידה, ויהי $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

א. הוכיחו כי f הוא אי פריק ב-$R[x]$ אם ורק אם הוא אי פריק ב-$R[x, x^{-1}]$.

ב. נניח $a_0 \neq 0$, ונתבונן בפולינום $\tilde{f}(x) = a_0 x^n + \ldots a_{n-1} x + a_n$ שבו הפכנו את סדר המקדמים של f. הוכיחו בעזרת הסעיף הקודם שאם $\tilde{f}$ מקיים את קריטריון אייזנשטיין, אז f אי פריק.

שאלה 7. יהי p מספר ראשוני. הראו שהפולינום $f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}$ הוא אי פריק מעל $\mathbb{Q}$.

שאלה 8. נתבונן בפולינום $f(x)=x^2+4$ מעל $\mathbb{Q}$. הראו ש-$f(ax+b)$ לא מקיים את קריטריון אייזנשטיין לכל $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\neq 0$, למרות ש-$f(x)$ אי פריק.

שאלות רשות לשעות הפנאי

שאלה 9. יהי F שדה. הוכיחו שבחוג $F[x]$ יש אינסוף איברים ראשוניים.
רמז: הוכחה המיוחסת לאוקלידס.

שאלה 10. מספר $\alpha\in\mathbb{C}$ נקרא שלם אלגברי אם קיים פולינום מתוקן $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ כך ש-$f(\alpha)=0$. את אוסף השלמים האלגבריים נסמן $\mathcal{A}$.

א. הוכיחו כי $\mathcal{A}$ הוא תת־חוג של $\mathbb{C}$.

ב. הוכיחו שלכל $\alpha\in\mathcal{A}$ גם $\sqrt{\alpha}\in\mathcal{A}$.

ג. הוכיחו כי $\mathcal{A}$ איננו חוג אטומי.

בהצלחה!