פתרון תרגיל 4

14 בספטמבר 2017

1. תהי $f:X\to Y$ פונקציה ו־$B\subseteq Y$.
   א. הוכיחו כי: $f[f^{-1}[B]]\subseteq B$, ושיש שיוויון אם f על.
   ב. מצאו דוגמא לפונקציה כנ"ל כך שההכלה היא הכלה ממש.

פתרון:

א. יהי $y\in f[f^{-1}[B]]$ אזי קיים $x\in f^{-1}[B]$ כך ש־$f(x)=y$. כיון ש־x הוא מקבוצת המקורות של B ובנוסף הוא המקור של y זאת אומרת ש־ $y\in B$ (הוא לא יכול להיות מקור של איבר נוסף כי הפונקציה חד ערכית).

כעת, נניח ש־f על, ונותר להוכיח רק את הכיוון השני, כלומר ש־$B\subseteq f[f^{-1}[B]]$. יהי $b\in B$. כיון ש־f על, זאת אומרת שקיים $x\in X$ כך ש־$f(x)=b$ ולכן $x\in f^{-1}[B]$, ולכן $b=f(x)\in f[f^{-1}[B]]$.

ב. $X=Y=\{1,2\},B=\{1,2\}$ ונגדיר $f(1)=f(2)=1$ אזי $f^{-1}[B]=\{1,2\}$ ו־$f(\{1,2\})=\{1\}\subset\{1,2\}=B$.

2. תהי $f:X\to Y$ פונקציה ותהיינה תתי הקבוצות $A_1,A_2\subseteq X,B_1,B_2\subseteq Y$.
   הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. $f^{-1}[B_1\cap B_2]=f^{-1}[B_1]\cap f^{-1}[B_2]$.
   ב. $f^{-1}[B_1\cup B_2]=f^{-1}[B_1]\cup f[B_2]$.
   ג. $f[A_1\cap A_2]=f[A_1]\cap f[A_2]$.
   ד. $f[A_1\cup A_2]=f[A_1]\cup f[A_2]$.
   ה. $f^{-1}[B_1^c]=(f^{-1}[B_1])^c$.
   ו. $f[A_1^c]=(f[A_1])^c$.
   ז. $f[A_1\triangle A_2]=f[A_1]\triangle f[A_2]$.
   ח. $f^{-1}[B_1\triangle B_2]=f^{-1}[B_1]\triangle f^{-1}[B_2]$.

פתרון:

א. הוכחה: $x\in f^{-1}[B_1\cap B_2]\iff f(x)\in B_1\cap B_2\iff f(x)\in B_1\wedge f(x)\in B_2\iff x\in f^{-1}[B_1]\wedge x\in f^{-1}[B_2]\iff x\in f^{-1}[B_1]\cap f^{-1}[B_2]$.

ב. הוכחה: $x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2] \iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \iff f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \iff x \in f^{-1}[B_1] \vee x \in f^{-1}[B_2] \iff x \in f^{-1}[B_1] \vee f^{-1}[B_2]$.

ג. הפרכה: $X = Y = \{1,2\}$ ו־$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב־$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$. כיוון ש־ $A_1 \cap A_2 = \phi$ נובע ש־ $f[A_1 \cap A_2] = f[\phi] = \phi$. אבל $f(A_1) = f(A_2) = \{1\}$ ולכן $f[A_1] \cap f[A_2] = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \phi$.

ד. הוכחה: כיוון ראשון ($\subseteq$): יהי $y \in f[A_1 \cup A_2]$ אזי קיים $a \in A_1 \cup A_2$ כך ש־$y = f(a)$. אם $a \in A_1$ אז $y \in f[A_1]$, אחרת $a \in A_2$ ואז $y \in f[A_2]$, ובסה"כ $y \in f[A_1] \vee y \in f[A_2]$ ולכן $y \in f[A_1] \cup f[A_2]$.

כיוון שני ($\supseteq$): יהי $y \in f[A_1] \cup f[A_2]$. אם $y \in f[A_1]$ אז קיים $a \in A_1$ כך ש־$y = f(a)$ אבל $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ ולכן $a \in A_1 \cup A_2$ והוא מקיים $y = f(a)$ ולכן $y \in f[A_1 \cup A_2]$. אחרת קיים $a \in A_2$ כך ש־$y = f(a)$ ונעשה אותו דבר.

ה. הוכחה: $x \in f^{-1}[B_1^c] \iff f(x) \in B_1^c \iff f(x) \notin B_1 \iff x \notin f^{-1}[B_1] \iff x \in (f^{-1}[B_1])^c$.

ו. הפרכה: $X = Y = \{1,2\}$ ו־$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב־$A_1 = \{1\}$. $A_1^c = \{2\}$ ולכן $f[A_1^c] = f[\{2\}] = \{1\}$. מצד שני $f[A_1] = \{1\}$ ולכן $(f[A_1])^c = \{2\} \neq \{1\}$.

ז. הפרכה: $X = Y = \{1,2\}$ ו־$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב־$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$. כיוון ש־$A_1 \triangle A_2 = \{1,2\}$ אזי $f[A_1 \triangle A_2] = \{1\}$. מצד שני $f[A_1] = f[A_2] = \{1\}$ ולכן $f[A_1] \triangle f[A_2] = \phi \neq \{1\}$.

ח. הוכחה: $x \in f^{-1}[B_1 \triangle B_2] \iff f(x) \in B_1 \triangle B_2 \iff f(x) \in B_1 \setminus B_2 \vee f(x) \in B_2 \setminus B_1 \iff (x \in f^{-1}[B_1] \wedge x \notin f^{-1}[B_2]) \vee (x \in f^{-1}[B_2] \wedge x \notin f^{-1}[B_1]) \iff x \in f^{-1}[B_2] \triangle f^{-1}[B_2]$.

3. שאלה ממבחן: תהי X קבוצה, $f : X \to X$ פונקציה, ותהיינה $A, B \subseteq X$ הוכיחו או הפריכו:

$$f[A \setminus B^c] = f[A] \setminus (f[B])^c$$

<u>פתרון:</u>

הפרכה: $X = Y = \{1,2\}$ ו־$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב־$A = \{1\}, B = \{2\}$ אזי $A \setminus B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B = \phi$ ולכן $f[A \setminus B^c] = \phi$. מצד שני $f[A] = \{1\}, f(B) = \{1\}, (f[B])^c = \{2\}$ ולכן $f[A] \setminus (f[B])^c = \{1\} \setminus \{2\} = \{1\} \neq \phi$.

4. תהיינה A, B קבוצות, תהא $f : A \to B$ פונקציה, ונגדיר פונקציה נוספת $g : P(B) \to P(A)$ ע"י:

$$g(X) = f^{-1}[X]$$

הוכיחו: g חח"ע $\iff$ f על.

פתרון:

($\Leftarrow$): נניח g חח"ע ונוכיח ש־f על. יהי $b \in B$ ונניח בשלילה שאין לו מקור, לכן נקבל ש־ $g(\{b\}) = f^{-1}[\{b\}] = \phi$. אבל תמיד מתקיים: $g(\phi) = f^{-1}[\phi] = \phi$ וקיבלנו $g(\phi) = g(\{b\})$ בסתירה לחח"ע של g.

($\Rightarrow$): נניח f על ונוכיח ש־g חח"ע: נניח $g(X) = g(Y)$ ולכן $f^{-1}[X] = f^{-1}[Y]$. כעת, כיון ש־f על ומתרגיל בית קודם נקבל $X = f[f^{-1}[X]] = f[f^{-1}[Y]] = Y$.

5. תהי X קבוצה, ותהי $f : X \to X$ פונקציה המקיימת $f \circ f = I_X$ (כלומר, ההרכבה של הפונקציה עם עצמה זה הזהות). נגדיר:

$$A = \{x \in X | f(x) \neq x\}$$

הוכיחו:

א. $f[A] = A$.

ב. אם A סופית אז גודלה זוגי.

פתרון:

א. יהי $a \in f[A]$, לכן קיים $b \in A$ כך ש $f(b) = a$. כעת נקבל

$$b = I_X(b) = f \circ f(b) = f(f(b)) = f(a)$$

$b \in A$ ולכן $a = f(b) \neq b$ ולכן $f(a) = b \neq a$, ולפי הגדרת A נקבל $a \in A$.

יהי $a \in A$, לכן $f(a) \neq a$ ובנוסף $f(f(a)) = a \neq f(a)$, ולכן $f(a) \in A$ ולכן $a = f(f(a)) \in f[A]$.

ב. נגדיר על A יחס שקילות $a \sim b \iff f(a) = b \vee a = b$. זה יחס שקילות (תוכיחו). נקבל מחד ש־$a \mapsto f(a) \wedge f(a) \mapsto a$, ובנוסף לכל $b \in A$ כך ש־ $b \neq a \wedge b \neq f(a)$ נקבל ש $f(b) \neq a \wedge f(b) \neq f(a)$ (תפעילו את f שוב). ולכן נקבל שלכל $a \in A$ מחלקת השקילות שלו היא $\{a, f(a)\}$, ולכן האוסף $\{\{a, f(a)\} | a \in A\}$ מהווה חלוקה ולכן סך האיברים ב־A הוא $2 \cdot |A/\sim|$ שזהו מספר זוגי.

6. הוכיחו או הפריכו:

א. אם A מוכלת ממש ב־B אז $|A| < |B|$.

ב. אם $|A| > 1$ אז $|A| < |A \times A|$.

פתרון:

א. לא נכון, קבוצת הזוגים מוכלת ממש בטבעיים, אך עוצמתן זהה.

ב. לא נכון. קחו $A = \mathbb{N}$.

7. על הקבוצה $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (אוסף הפונקציות מהטבעיים לעצמם) נגדיר יחס $\sim$ ע"י: לכל $f,g\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$$f\sim g \iff Im(f)=Im(g)$$

א. הוכיחו כי $\sim$ יחס שקילות.
ב. עבור הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(n)=17$ מצאו את $|[f]_\sim|$.
ג. הוכיחו: $\left|{}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\!/\!\sim\right|=|P(\mathbb{N})|$.

<u>**פתרון:**</u>

א. רפלקסיביות: לכל f אכן $Im(f)=Im(f)$.

סימטריות: $Im(f)=Im(g) \iff Im(g)=Im(f)$.

טרנזיטיביות: $Im(f)=Im(g)\wedge Im(g)=Im(h)\Rightarrow Im(f)=Im(h)$.

ב. הפונקציה היחידה ששקולה ל־f זו היא בעצמה, כי אם $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מקיימת $Im(g)=\{17\}$ אזי נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ דרוש $g(n)=17$, ולכן $g=f$. כלומר $|[f]_\sim|=1$.

ג. נראה ש־ $\left|{}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\!/\!\sim\right|=|P(\mathbb{N})\setminus\{\phi\}|$, ואז לפי תרגיל שהראנו בכיתה:

$$|P(\mathbb{N})\setminus\{\phi\}|=|P(\mathbb{N})|$$

סיימנו (כי שיוויון עוצמות הוא יחס שקילות).

נגדיר פונקציה $F:{}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\!/\!\sim\;\to P(\mathbb{N})\setminus\{\phi\}$ ע"י:

$$F([g]_\sim)=Im(g)$$

ראשית נראה שF מוגדרת היטב: נניח $[g]_\sim=[h]_\sim$, אזי זאת אומרת $g\sim h$ ולכן $Im(g)=Im(h)$ ולכן $F([g]_\sim)=F([h]_\sim)$ כמו שרצינו.

חח"ע: נניח $[g]_\sim\neq[h]_\sim$ אזי $g\nsim h$ ולכן $Im(g)\neq Im(h)$, ולכן $F([g]_\sim)\neq F([h]_\sim)$.

על: תהי $X\in P(\mathbb{N})\setminus\{\phi\}$, לכן קיים $x\in X$ ונוכל להגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא:

$$f(n)=\begin{cases} n & n\in X\\ x & n\notin X\end{cases}$$

ומתקיים $Im(f)=X$ ולכן $F([f]_\sim)=X$. מצאנו מקור!!

8. א. תהיינה A, B קבוצות כך ש $|A \setminus B| = |B \setminus A|$ הוכיחו:

$$|A| = |B|$$

ב. תהיינה A, B קבוצות זרות. הוכיחו:

$$|P(A \cup B)| = |P(A) \times P(B)|$$

<u>פתרון:</u>

א. קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \setminus B \to B \setminus A$. נגדיר פונקציה $g : A \to B$ ע"י:

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & a \in A \setminus B \\ a & a \in A \cap B \end{cases}$$

זו פונקציה חח"ע ועל:

חח"ע: נניח $g(a) = g(b)$, אם $g(a), g(b) \in B \setminus A$ אז לפי הגדרת הפונקציה נקבל $a, b \in A \setminus B$ ולכן, כיון ש־f חח"ע, נקבל $a = b$. אם $g(b), g(a) \in A \cap B$, אז לפי הגדרת הפונקציה נקבל $a = f(a) = f(b) = b$.

על: יהי $b \in B$. אם $b \in A$ אז $b \in A \cap B$ ולכן נקבל ש־$f(b) = b$ (והוא המקור של עצמו. אחרת, $b \in B \setminus A$, וכיון ש־f על יש לו מקור ב־$A \setminus B$.

ב. נגדיר פונקציה חח"ע ועל $f : P(A \cup B) \to P(A) \times P(B)$ ע"י

$$\forall X \subseteq A \cup B : f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

נראה חח"ע ועל:

חח"ע: נניח $f(X) = f(Y)$, אזי נקבל $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$, כלומר $X \cap A = Y \cap A \wedge X \cap B = Y \cap B$. נראה $X \subseteq Y$ ובאותו אופן מתקיים להיפך. יהי $x \in X$. אם $x \in A$ אז $x \in X \cap A = Y \cap A$ ולכן $x \in Y$. אחרת, כיון ש־$X \subseteq A \cup B$ נקבל $x \in B$ ולכן $x \in X \cap B = Y \cap B$ ולכן $x \in Y$.

על: יהי $(X, Y) \in P(A) \times P(B)$. כיון שנתון $A \cap B = \phi$, נקבל ש־ $(X \cup Y) \cap A = (X \cap A) \cup (Y \cap A) = X \cup \phi = X$, ובאותו אופן $(X \cup Y) \cap B = Y$, ולכן נקבל $f(X \cup Y) = (X, Y)$.