אינפי 3 תרגול 5, סמסטר א' 2014

11 בנובמבר 2013

דיפרנצאביליות של פונקציות וקטוריות, יעקוביאן וטיילור בכמה משתנים

הערה: לאורך תרגול כשאכתוב a,h הכוונה תמיד ל$\underline{a},\underline{h}$ בהתאמה.

הגדרה: תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad \underline{a}\in\mathbb{R}^n$ נאמר כי f דיפר' ב־$\underline{a}$ אם: f מוגדרת בסביבת $\underline{a}$ ובנוסף:

$$f(a+h)=f(a)+L(h)+\epsilon(h)\cdot||h||$$

כאשר $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית ו־$\epsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש$\epsilon(h)\to 0$. $\epsilon(h)\cdot|h||=o(h)=o(||h||)$.

משפט: f דיפר'$\Leftarrow$ $L(h)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$ מטריצה יעקובי של f בנקודה a.

$(\star)$אם f פונקציה סקלרית:$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אז $f(a+h)=f(a)+\underbrace{f\prime_{x_1}(a)\cdot h_1+\cdots+f\prime_{x_n}(a)\cdot h_m}_{L(h)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_m\end{pmatrix}}+\epsilon(h)\cdot||h||$ היכן ש$\vec{\nabla}f_{(a)}=(f\prime_{x_1}(a)\dots f\prime_{x_n}(a))$.

דוגמה: לחשב <u>מטריצת יעקובי</u> של הפונקציה $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$:

$$\underline{F}(u,v)=\begin{pmatrix}\overset{f_1(u,v)}{(u+v)^2(u-v)^3}\\ \overset{f_2(u,v)}{2(u+v)e^{u-v}}\\ \overset{f_3(u,v)}{3(u-v)^4}\end{pmatrix}$$

בנקודה $(1,1)$.

תשובה: מטריצת יעקובי היא

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(1,1) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(1,1) \end{pmatrix}$$

שכן

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) &= 2(u+v)(u-v)^3 = +(u+v)^2 \cdot 3(u-v) \\ \frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1) &= 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) &= 2(u+v)(u-v)^3 - (u+v)^2 3(u-v) \\ \frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1) &= 0 \end{aligned}$$

קירוב לינארי וטיילור

דיפרנציאל מסדר n: תהי $f \in C^n(\Omega)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר n בנקודה פתוחה Ω ב־$\mathbb{R}^2$. דיפרנציאל מסדר 1:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \overrightarrow{\nabla f} \cdot (\Delta x, \Delta y)$$

היכן ש־$\Delta x, \Delta y$ קטנים מ־x, y.

קירוב ליניארי: אם f דיפ' ב־(x_0, y_0), אז:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df = f(x_0, y_0) + df + \epsilon ||\Delta x, \Delta y||$$

בנוסף, נגדיר דיפרנציאל מסדר גבוה: $d^n f = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n}_{operator} f$. כאשר $n = 2$:

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y$$

לדוגמה: לחשב את $d^2 f(x,y)$ כאשר $f(x,y) = x \cdot e^y$.

קיבלנו:

$$d^2 f(x,y) = \underbrace{f''_{xx}(x,y)}_{0} \cdot (\Delta x)^2 + 2\underbrace{f''_{xy}(x,y)}_{e^y} \cdot \Delta x \Delta y + \underbrace{f''_{yy}(x,y)}_{xe^y} \cdot (\Delta y)^2$$

חישוב נגזרת שניות:

$$\begin{aligned} f\prime_x(x,y) &= e^y, f\prime_y(x,y) = xe^y \\ f\prime\prime_{xx}(x,y) &= 0, f\prime\prime_{yy}(x,y) = xe^y \\ f''_{xy}(x,y) &= e^y \end{aligned}$$

נוסחת טיילור לפונקציה בשני משתנים:

תהי $f \in C^{n+1}(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ פתוחה, Ω מכילה את כל הנקודות $A(x_0, y_0), \quad B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ואת כל הישר המחבר את A עם B אז על הקטע AB ניתן למצוא נק' בינהם $C(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1$ כך ש:

$$f(B) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^n d(A)}{n!} + \underbrace{\frac{d^{n+1} f(c)}{(n+1)!}}_{R_n}$$

דוגמה: נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$. פתח את f לטור טיילור סביב הנקודה $A(1,1)$.

תשובה: f הוא פולינום ממעלה 3 במשתנים x, y לכן לכל $n > 3$ $d^n f = 0,$, ואז:

$$f(B) = f((x,y)) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \frac{d^3 f(A)}{3!} + \underbrace{0}_{R_3\text{:def(f)=3,hence error is 0}}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - 1 \\ \Delta y &= y - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 0 \\ df(1,1) &= f\prime_x((1,1))(x-1) + f\prime_y((1,1)) \cdot (y-1) = 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) \\ f\prime_x(x,y) &= 3x^2 - 2y \\ f\prime_y(x,y) &= 3y^2 - 2x \\ d^2 f(1,1) &= f\prime\prime_{xx}(1,1) \cdot (x-1)^2 + 2f\prime\prime_{xy}(1,1) \cdot (x-1)(y-1) + f\prime\prime_{yy}(1,1) \cdot (y-1)^2 \\ &= 6(x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2 \\ f\prime\prime_{xx}(x,y) &= 6x \\ f\prime\prime_{xy}(x,y) &= -2 \\ f\prime\prime_{yy}(x,y) &= 6y \end{aligned}$$

ובאופן דומה בדיפרנציאל השלישי. לבסוף נקבל:

$$f(x,y)=(x-1)+(y-1)+3(x-1)^2-2(x-1)(y-1)+3(y-1)^2+(x-1)^3+(y-1)^3$$

כלל שרשרת:

נגזרות של הרכבה: גירסה I ($1 \to 2$): f דיפרנצאבילית בתחום $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ונניח כי הפונקציות $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ (היכן ש$t \in I$ קטע על $\mathbb{R}$) גזירות ב־I, כך ש־$(x(t),y(t)) \in \Omega$ לכל $t \in I$, אזי הרכבה $z(t)=f(x(t),y(t)), t \in I$ היא פונקציה גזירה לפי t ב־I ומתקיים:

$$z\prime(t)=\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

גירסה II ($2 \to 2$ החלפת מערכת 2 מימדית במערכת אחרת דו מימדית): $z=f(x,y)$ דיפר' ב־Ω במישור xy ותהיה $\begin{cases} x=x(t,s) \\ y=y(t,s) \end{cases}$ כך ש־$(t,s) \in D$ במישור ts וx,y דיפר' ב־D. ו$(x(t,s),y(t,s)) \in \Omega$. נגדיר הרכבה

$$z=z(t,s)=f\left(x(t,s),y(t,s)\right)$$

אזי z דיפר' ב־D ומתקיים:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t};\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

אפשר לדבר על כלל שרשרת מ$\mathbb{R}^n$ל־$\mathbb{R}^m$.

דוגמאות:

1. תהי $z=f(u)$ גזירה ולא קבועה ($f \not\equiv 0$). נתון $u(x,y)=x^2+y^2$. נגדיר $z(x,y)=f(u(x,y))=f(x^2+y^2)$. רוצים למצוא ערך של $a \in \mathbb{R}$, כך ש־

$$(\star) \qquad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad y\frac{\partial z}{\partial x}=ax\frac{\partial z}{\partial y}$$

תשובה: לפי שרשרת מקבלת:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot f\prime(u) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\partial y\cdot f\prime(u)\end{aligned}$$

לכן המשוואה $(\star)$ היא:

$$y \cdot 2xf\prime(u) = a \cdot x \cdot 2yf\prime(u) \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

זה צריך להתקיים לכל x, y ו$f \not\equiv 0$.

2. תהי $z = f(u,v)$ דיפר' ונגדיר $u = 2x + 3y, v = x - y$. <u>נתון:</u> $\frac{\partial z}{\partial u}(7,1) = 2, \frac{\partial z}{\partial v}(7,1) = 3, z(x,y) = f(2x+3y, x-y)$. לחשב $\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) + \frac{\partial z}{\partial y}(2,1)$.
לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) &= \frac{\partial f}{\partial u}(7,1) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(2,1) + \frac{\partial f}{\partial v}(7,1) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(2,1) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \\
\frac{\partial z}{\partial y}(2,1) &= \frac{\partial f}{\partial u}(7,1) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(2,1) + \frac{\partial f}{\partial v}(7,1) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(2,1) = 2 \cdot 3 + 3(-1) = 3 \\
\Rightarrow \tfrac{\partial z}{\partial x}(2,1) + \tfrac{\partial z}{\partial y}(2,1) &= 7 + 3 = 10
\end{aligned}$$