המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

אנליזה מודרנית – 01/04 – 88 341 – סמסטר א' תשע"ז

מבחן מועד א'

יום ה', י"ג בשבט תשע"ז, 9.2.17

מרצים: בוריס סולומיאק, טל נוביק

הנחיות:

א. אין להשתמש בכל חומר עזר.

ב. אנא רשום בפינה השמאלית העליונה של כריכת המחברת, מעל המילים "מדור בחינות", את מספרי השאלות שבחרת.

ג. משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף הבחינה.

<u>ענה על אחת משתי השאלות הבאות:</u>

1. יהי $(X,\mathbb{A})$ מרחב מדיד. תהי $f_n: X \to \mathbb{R}$ סדרה של פונקציות מדידות המתכנסת נקודתית לפונקציה f. הראה ש f מדידה.

2. יהיו ν,μ שתי מידות על אותה σ-אלגברה, המקיימות ש ν סופית ו $\nu \ll \mu$. הראה שלכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל קבוצה מדידה E מתקיים שאם $\mu(E) < \delta$ אז $\nu(E) < \epsilon$.

<u>ענה על שלוש מבין ארבע השאלות הבאות:</u>

3. תהי $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה לבג המקיימת $g(x+1) = g(x)$ לכל x, וכן $\int_0^1 g\, dm < \infty$. נגדיר $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(nx)}{n^2}$. הראה ש f סופית כ.ב.מ.

4. יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה ו $\mu(X) < \infty$, ויהיו $1 \le r < p < \infty$.

   א. הראה שלכל $f \in L^p(\mu)$ מתקיים $\|f\|_r \le \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|f\|_p$.

   ב. הראה ש $L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu)$.

5. א. חשב: $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}dx$.

   ב. חשב: $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/n}}{1+e^{nx}}dx$.

6. תהי $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ משפחת הפונקציות במרחב הילברט $L^2(\mathbb{R},m)$ המוגדרות כך: $f_n = 1_{[n,n+1]}$ כלומר לכל $n \in \mathbb{Z}$, f_n היא הפונקציה המציינת (האינדיקטור) של הקטע $[n,n+1]$.

   א. האם זוהי משפחה אורתונורמלית ?

   ב. האם תת המרחב הנפרש ע"י משפחה זו צפוף ב $L^2(\mathbb{R},m)$?

בהצלחה!