תרגיל בית 9 - אנליזה מודרנית

1. נניח ו μ הינה מידה סופית . הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית הינה אינטגרבילית אמ"מ
$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x : f\left(x\right)\geq n\right\}\right)<\infty$.

2. מצאו פונקציה $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה ולא אינטגרבילית לבג אך כך שהאינטגרל רימן הלא אמיתי שלה קיים.
כלומר, אנו רוצים ש $\int_0^1\left|f\right|dm=\infty$ אבל ש $\lim_{a\to 0^+}R\left(f1_{(a,1]}\right)$ קיים.

3. יהי $X=Y=\mathbb{R}$ ונסתכל על $\mathbb{R}^2$ ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}1 & x\geq 0 \text{ and } x\leq y<x+1\\ -1 & x\geq 0 \text{ and } x+1\leq y<x+2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

הראו כי $\int\int f\left(x,y\right)m\left(dy\right)m\left(dx\right)\neq\int\int f\left(x,y\right)m\left(dx\right)m\left(dy\right)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?

4. תהי A תת קבוצה של $[0,1]^2$ מדידה לבג (ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה) עם מידה $m_2\left(A\right)=1$ כאשר $m_2=m\times m$ ו m הינה מידת לבג. הראו כי כמעט לכל $x\in[0,1]$ הקבוצה $s_x\left(A\right)=\{y:\left(x,y\right)\in A\}$ הינה בעלת מידה $m\left(s_x\left(A\right)\right)=1$.