# תרגולים 10־14 - מרטינגלים - תשע"ט

16 במאי 2019

- **<u>אינטואיציה במחשבה על מרטינגלים ־ הימורים הוגנים</u>**

  - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות עם הסינון הטבעי ו־ $\{X_n\}$ תהליך סטוכסטי המייצג סדרה של הימורים בזמן $n \in \mathbb{N}$.

    * הזכייה בין המשחק ה־ $n-1$ למשחק ה־$n$ היא $X_{n+1} - X_n$.

      · אם $X_n$ מרטינגל תוחלת הזכייה בזמן ה־ $n$ היא 0. כלומר המשחק הוגן ־

      $$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathcal{F}_n) = 0$$

      · אם $X_n$ על־מרטינגל תוחלת הזכייה בזמן ה־ $n$ היא שלילית. כלומר המשחק הוא לרעת השחקן ־

      $$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathcal{F}_n) \leq 0$$

- **<u>זמן עצירה</u>**

  - המשתנה המקרי $\tau : \Omega \to \{1, 2, 3, ...\} \cup \{\infty\}$ נקראת "זמן עצירה" ביחס לסינון $\mathbb{F}$אם $\forall_t \, \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. כלומר, בכל נקודה בזמן השאלה "האם לעצור את המשחק?" הוא מידע זמין בסיגמא אלגברה ־ המידע "עצירה בזמן $t$" מדיד בזמן $t$.

- באופן שקול $\tau$ זמן עצירה אם $\forall_t \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ (עבור $\tau$ משתנה מקרי המקבל ערכים בדידים).
- **<u>דוגמא 1</u>**

  * יהי $\{X_n\}$ תהליך סטוכסטי המכבד את הסינון $\mathbb{F}$. וכן, $\forall_n X_n : \Omega \to \mathbb{R}$.
  * נגדיר $\tau = min\{n \geq 0 \,|\, X_n \in A\}$ עבור מצב כלשהו $i$. $\tau$ משתנה מקרי המחזיר את "זמן הפגיעה" הראשון של התהליך הסטוכסטי במרחב המצבים $A$.

$$\tau(\omega) = min\{n \geq 0 \,|\, X_n(\omega) \in A\}$$

  * **נביט בהתהליך הבא (התרוששות המהמר)**

    · לקזינו מגיע מהמר עם הון של $\$k$ ומטרתו הוא לסיים את המשחק עם $\$N$ ($0 < k < N$).
    · רצף ההימור הוא תהליך סטוכסטי $\{X_n\}$ כך שבכל שלב אנו מונים את הונו של המהמר.
    · $X_n$ מהווה הילוך מקרי פשוט $X_n = Y_1 + ... + Y_n$ כך שכל $Y_i$ מתאר זכיה או הפסד של המהמר ב־$\$1$.
    · $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p$ כהסתברות לזכיה בהימור אחד. ו־ $\mathbb{P}(Y_i = -1) = 1 - p$ בהסתברות להפסד.
    · $X_n$הילוך מקרי פשוט המהווה מרטינגל.
    · המשחק נעצר אם $X_n = N$ או $X_n = 0$.
    · נגדיר משתנה מקרי $\tau = min\{n \geq 0 \,|\, X_n \in \{0, N\}\}$. נבקש להוכיח ש־ $\tau$ זמן עצירה.

  * $\tau$ זמן עצירה אם

$$\forall_{t>0}\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$$

מכיוון ש־ $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, ..., X_t)$ ו־

$$\{\tau = t\} = \{min\{n \geq 0 \,|\, X_n \in \{0, N\}\} = t\} =$$

$$\{X_0 \notin \{0, N\}, X_1 \notin \{0, N\} ..., X_{t-1} \notin \{0, N\}, X_t \in \{0, N\}\}$$

אזי המאורע $\{\tau = t\}$ נקבע ע"י המאורעות הנוצרים ע"י $X_1, .., X_t$. כלומר $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$. כדרוש.
סך הכל הראנו כי משתנה מקרי המוגדר $\tau(\omega) = min\{n \geq 0 \,|\, X_n(\omega) \in A\}$ מהווה זמן עצירה.

- **<u>דוגמא 2</u>** ־ דוגמא למשתנה מקרי שאינו זמן עצירה (בעית העכבר במבוך)

  * נביט במצב בו יש עכבר במבוך עם נקודת התחלה וסוף, כך שבסופו של התהליך העכבר יוצא לחופשי מהמבוך ולא חוזר.
  * נקבע את המצב ההתחלתי של המבון $X_0 = 1$. והמצב הסופי כמצב 0.
  * נקבע משתנה מקרי המחזיר את הפעם האחרונה בו העכבר ביקר בנקודה 1, לפני שעזב את המבוך

$$\tau = max\{n \geq 0 \,:\, X_n = 1\}$$

ברור כי זהו אינו זמן עצירה, מכיוון שאנחנו צריכים לדעת את העתיד כדי "למדוד" אותו. למשל

$$[\tau = 0\} = \{X_0 = 1, X_1 \neq 1...\}$$

עלינו לדעת את העתיד כדי לקבוע אם העכבר חזר למצב 1 לפני יציאתו מהמבוך או לא. ולכן במקרה זה $\tau$אינו זמן עצירה.

- **<u>טענה</u>**

  * אם $\sigma$ ו־ $\tau$ זמני עצירה. אזי:
    · $\sigma \vee \tau = max\{\sigma, \tau\}$ זמן עצירה.
    · $\sigma \wedge \tau = min\{\sigma, \tau\}$ זמן עצירה.
    · $\sigma + \tau$ זמן עצירה (עבור $0 \leq \sigma, \tau$).
    · $a + \tau$ זמן עצירה (עבור $s \geq 0$).

- **<u>טענה</u>** ($O.S.T$ ־ משפט הדגימה של דוב)

  * יהי $\mathbb{X} = \{X_n\}_{n \geq 0}$ מרטינגל ויהי $S \leq T$ זמני עצירה חסומים ע"י קבוע $C$ אזי $\mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_S] = X_S \; a.s$.

- **אי־שיוויונים**

* אי שיוויון ינסן:

- יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע כלשהוא. נסמן פונקציה קמורה $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (כל ישר המחבר בין 2 נקודות על הפונקציה יהיה מעליה).
- יהי $X$ משתנה מקרי כך ש־ $ImX \subseteq I$ מעל מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- נתון $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ ו־ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$.
- אזי ־ $\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}] < \infty$.

* אי שיוויון המרטינגלי הראשון של דוב

- יהי $M = \{M_n\}_{n \geq 0}$ מרטינגל (או תת מרטינגל חיובי). אזי:

$$\mathbb{P}(\underset{j \leq n}{Sup}|M_n| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_n|]}{\alpha}$$

- **תרגיל**

נתון $S, T$ זמני עצירה $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ סינון עולה. הוכח:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_T] \mid \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{F}_S] \mid \mathcal{F}_T] {=} \mathbb{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{F}_{S\wedge T}]$$

הוכחה

על פי הגדרה $S \wedge T \leq T$ לכן, $\mathcal{F}_{S\wedge T} \subseteq \mathcal{F}_T$

כמו כן, $S \wedge T \leq S$ ואז $\mathcal{F}_{S\wedge T} \subseteq \mathcal{F}_S$

לכן, מתכונות התוחלת המותנית

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_T] \mid \mathcal{F}_{S\wedge T}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{F}_{S\wedge T}] \mid \mathcal{F}_T] {=} \mathbb{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{F}_{S\wedge T}]$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_S] \mid \mathcal{F}_{S\wedge T}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{F}_{S\wedge T}] \mid \mathcal{F}_S] {=} \mathbb{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{F}_{S\wedge T}]$$

לכן,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_T] \mid \mathcal{F}_{S\wedge T}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_S] \mid \mathcal{F}_{S\wedge T}] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{S\wedge T}]$$

זהו סינון עולה לכן, אם $S \wedge T = S \leq T$ אזי $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_T] \mid \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_S] \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{S\wedge T}]$$

אם $S \leq T = S \wedge T$ אי $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}_S$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_T] \,|\, \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_S] \,|\, \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{S\wedge T}]$$

בכל מקרה

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_T] \,|\, \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{F}_S] \,|\, \mathcal{F}_T]{=}\mathbb{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{F}_{S\wedge T}]$$

כדרוש.

- **תרגיל**

יהי $M = \{M_n\}$ מרטינגל כך ש- $L^2$ $\forall_n M_n \in$. ויהיו $S \leq T$ זמני עצירה חסומים. הוכח:

* אם $M_S, M_T \in L^2$ אזי $\mathbb{E}[(M_T - M_S)^2|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[M_T^2 - M_S^2|\mathcal{F}_S]$

<u>פתרון</u>

נחשב

$$\mathbb{E}[(M_T - M_S)^2|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[M_T^2 - 2M_T M_S + M_S^2|\mathcal{F}_S] =$$

$$\mathbb{E}[M_T^2 \,|\, \mathcal{F}_S] - 2M_S\mathbb{E}[M_T \,|\, \mathcal{F}_S] + \mathbb{E}[M_T^2 \,|\, \mathcal{F}_S] =$$

ולפי משפט הדגימה של דוב.

$$\mathbb{E}[M_T^2 \,|\, \mathcal{F}_S] - 2M_S^2 + \mathbb{E}[M_S^2 \,|\, \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[M_T^2 - M_S^2|\mathcal{F}_S]$$