מטלה מס' 5 - פתרונות סופיים

1. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

(1.1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$

(1.2) $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

(1.2) $y'' - 4y' + 5y = 0$

פתרון:

פ"א: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

קיבלנו שלפולינום האופייני יש זוג שורשים מרוכבים צמודים,

לכן הפתרון הכללי הוא: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

(1.3) $y = e^{\frac{2}{3}x}(C_1 + C_2 x)$

(1.4) $y = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x + x(C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x)$

(1.5) $y = C_1 + C_2 \cdot e^{-x} + e^{x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$

(1.6) $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cdot \underbrace{e^{0 \cdot x}}_{1} + (C_4 + C_5 x)e^{3x}$

(1.7) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

(1.7) $y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$

פתרון:

פ"א: $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

ממשפט יסודי של אלגברה אם יש לפולינום כזה שורש שלם הוא חייב לחלק את 4. נבדוק:

$1: 1 - 4 + 5 - 4 + 4 = 2 \neq 0$

$-1: 1 + 4 + 5 + 4 + 4 = 18 \neq 0$

$2: 16 - 32 + 20 - 8 + 4 = 0$ V

לכן $\lambda_1 = 2$ הוא שורש של פ"א ולכן מתקיים כי:

$P(\lambda) = (\lambda - 2) \cdot Q(\lambda)$

עד מעט נמצא את $Q(\lambda)$ בעזרת חילוק ארוך של פולינומים...

$$
\begin{array}{rl}
\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & \\
\hline
\lambda^4-4\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda+4 & \big|\ \lambda-2 \\
-\ \lambda^4-2\lambda^3 & \\
\hline
-2\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda+4 & \\
-\ -2\lambda^3+4\lambda^2 & \\
\hline
\lambda^2-4\lambda+4 & \\
-\ \lambda^2-2\lambda & \\
\hline
-2\lambda+4 & \\
-\ -2\lambda+4 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$P(\lambda)=(\lambda-2)\underbrace{(\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2)}_{Q(\lambda)} \quad \Leftarrow$$

שוב, אם יש ל $Q(\lambda)$ שורש שלם הוא חייב לחלק את 2. נבדוק:

$1:\ 1-2+1-2=-2\neq 0$

$-1:\ -1-2-1-2=-6\neq 0$

$2:\ 8-8+2-2=0$ ✓

לכן, $Q(\lambda)=(\lambda-2)\cdot R(\lambda)$

נעשה שוב חילוק פולינומים:

$$
\begin{array}{rl}
\lambda^2+1 & \\
\hline
\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & \big|\ \lambda-2 \\
-\ \lambda^3-2\lambda^2 & \\
\hline
\lambda-2 & \\
-\ \lambda-2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$Q(\lambda)=(\lambda-2)\cdot\underbrace{(\lambda^2+1)}_{R(\lambda)} \quad \Leftarrow$$

לכן בסה"כ קיבלנו:

$$P(\lambda)=(\lambda-2)^2\cdot(\lambda^2+1)$$

סה"כ יש שורש ממשי 2 מריבוי 2 ועוד 2 שורשים מרוכבים צמודים $\pm i$. ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$\underline{y=e^{2x}(C_1+C_2x)+C_3\cos x+C_4\sin x}$$

2) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-5x} + \frac{x}{100}(27-5x) \quad (2.1)$$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{x}{2}\sin x \quad (2.2)$$

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - x\cos x + \sin x \ln|\cos x| \quad (2.3)$$

$$(*)\ y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (2.3)$$

פתרון

הומוג:

$$(**)\ y''' + y' = 0$$

פ"א:

$$\lambda^3 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\quad \lambda_{2,3} = \pm i$$

לכן הפתרון הכללי של (**) הוא:

$$y = C_1 \cdot e^{0\cdot x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

$$= C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

לפי שיטת ורונסקיאן המשמשת נחפש את הפתרון הכללי של (*) כצורה:

$$y = C_1(x)\cdot \underbrace{1}_{y_1(x)} + C_2(x)\cdot \underbrace{\cos x}_{y_2(x)} + C_3(x)\cdot \underbrace{\sin x}_{y_3(x)}$$

ונגיע למערכת הבאה לקביעת הערכים של $C_1'(x), C_2'(x), C_3'(x)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{pmatrix}}_{\text{מטריצת ורונסקי}} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ C_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$$

נמצא את $C_1'(x), C_2'(x), C_3'(x)$ בכלל קרמר:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1\cdot(-\sin x)(-\sin x) + 0\cdot(-\cos x)\cdot\sin x + 0\cdot\cos x\cdot\cos x$$

$$-0\cdot(-\sin x)\cdot(\sin x) - 0\cdot\cos x\cdot(-\sin x) - 1\cdot(-\cos x)\cos x$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$W_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \frac{1}{\cos x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos x}\cdot\cos^2 x + \frac{1}{\cos x}\cdot\sin^2 x = \underline{\underline{\frac{1}{\cos x}}}$$

$$W_{C_2'(x)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \frac{1}{\cos x} & -\sin x \end{vmatrix} = -1\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\cos x = \underline{\underline{-1}}$$

$$W_{C_3'(x)} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = \underline{\underline{-\tan x}}$$

ולכן, לפי כלל קרמר:

$$C_1'(x) = \frac{W_{C_1'(x)}}{W} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C_1(x)}} = \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \left| \underbrace{\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix}}_{\text{הצבה}} \right| = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} =$$

$$\overset{\text{הצבה}}{=} \int \frac{dt}{1-t^2} = \text{שברים חלקיים...} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C_1}}$$

$$C_2'(x) = \frac{W_{C_2'(x)}}{W} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C_2(x)}} = -x + C_2$$

$$C_3'(x) = \frac{W_{C_3'(x)}}{W} = -\tan x$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C_3(x)}} = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \underline{\underline{\ln|\cos x| + C_3}}$$

ולכן, הפתרון הכללי של (*) הוא:

$$y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C_1 + (-x + C_2)\cdot\cos x + (\ln|\cos x| + C_3)\cdot\sin x$$

$$= \underbrace{C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - x\cos x + \sin x\cdot\ln|\cos x|}_{y_p}$$

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^{-2x} + x - e^{-x} \qquad (2.4)$$

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{4x} - \frac{e^{4x}}{6}\left(2x^3 + 6x^2 + 12x\right) \qquad (2.5)$$

3 למשוואות הבאות נתונים 2 פתרונות בת"ל של המשוואה ההומוג' הקשורה. מצא את הפתרון הכללי שלהן:

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}x^3 \ln x - \frac{3}{4}x^3 \qquad (3.1)$$

$$\circledast \quad y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} = x \ln x \qquad (3.1)$$

<u>פתרון:</u>

נתון כי $y_1(x) = x$ ו- $y_2(x) = x^2$ הם 2 פתרונות בת"ל של המשוואה ההומוגנית הקשורה של $\circledast$, ולכן, לפי שיטת וריאציית המקדמים, נחפש פתרון כללי של $\circledast$ בצורה:

$$y = C_1(x) \cdot \underbrace{x}_{y_1(x)} + C_2(x) \cdot \underbrace{x^2}_{y_2(x)}$$

ונגיע למערכת הבאה לקביעת הערכים של: $C_1'(x), C_2'(x)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}}_{\text{מטריצת וורונסקי}} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \ln x \end{pmatrix}$$

על מנת למצוא את $C_1'(x), C_2'(x)$ נשתמש בכלל קרמר.

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$$

$$W_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ x \ln x & 2x \end{vmatrix} = -x^3 \ln x \,, \quad W_{C_2'(x)} = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x \ln x \end{vmatrix} = x^2 \ln x$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = \frac{W_{C_1'(x)}}{W} = \frac{-x^3 \ln x}{x^2} = -x \ln x$$

$$C_2'(x) = \frac{W_{C_2'(x)}}{W} = \frac{x^2 \ln x}{x^2} = \ln x$$

$$C_1(x) = -\int x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x\,dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

$$= -\left(\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx \right) = -\ln x \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x^2 + C_1$$

$$C_2(x) = \int \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \int dx = x \end{array} \right|$$

$$= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C_2$$

ולכן, נקבל שהפתרון הכללי של ⊛ הוא:

$$y = \left(-\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C_1\right)\cdot x + (x\cdot\ln x - x + C_2)\,x^2$$

$$= \underbrace{C_1 x + C_2 x^2}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{2}x^3\ln x - \frac{3}{4}x^3}_{y_p}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{x^2} + \frac{1}{8}(x^4 - 2x^2 + 2)e^{x^2} \qquad (3.2)$$

$$y = C_1 x + C_2 x\ln|x| + x^2 + \frac{1}{2}x\cdot(\ln|x|)^2 \qquad (3.3)$$

4 פתור את המשוואה הבאה עם תנאי ההתחלה הנתונים.

$$y = e^{4x}\cdot\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \qquad (4.1)$$

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = e^{4x} \quad ⊛ \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad (4.1)$$

פתרון

הומוגני:

$$⊛⊛ \quad y'' - 8y' + 16y = 0$$

$$(\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

הפתרון הכללי של ⊛⊛ הוא: $y_h = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$

$f(x) = e^{4x}$, $\alpha + i\beta = 4$ הוא שורש של פ"א מסדר 2 $\Leftarrow$ $r = 2$

ולכן נחפש את y_p של ⊛ בצורה: $y_p = Ax^2\cdot e^{4x}$

וגם:

$$y_p' = 2Ax\cdot e^{4x} + 4Ax^2\cdot e^{4x}$$

$$y_p'' = 2Ae^{4x} + 8Ax\cdot e^{4x} + 8Ax\cdot e^{4x} + 16Ax^2\cdot e^{4x} = 2Ae^{4x} + 16Axe^{4x} + 16Ax^2e^{4x}$$

נציב את זה ב-⊛ ונקבל:

$$2A\cancel{e^{4x}} + 16Ax\cancel{e^{4x}} + 16Ax^2\cdot\cancel{e^{4x}} - 8(2Ax\cancel{e^{4x}} + 4Ax^2\cancel{e^{4x}}) + 16Ax^2\cancel{e^{4x}} = \cancel{e^{4x}}$$

$$2A + \cancel{16Ax} + 16Ax^2 - \cancel{16Ax} - 32Ax^2 + 16Ax^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

לכן, הפתרון הכללי של ⊛ הוא:

$$y = \underbrace{e^{4x}(C_1 + C_2x)}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{2}x^2\cdot e^{4x}}_{y_p}$$

כעת, נמצא פתרון פרטי שמקיים את תנאי ההתחלה:

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

נקבל:

$$y(0) = 0 \Rightarrow e^{4\cdot 0}(C_1 + C_2\cdot 0) + \frac{1}{2}\cdot 0^2\cdot e^{4\cdot 0} = 0$$

$$\underline{C_1 = 0}$$

$$y' = 4e^{4x}(C_1 + C_2x) + C_2\cdot e^{4x} + xe^{4x} + 2x^2e^{4x}$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 4\cdot e^{4\cdot 0}(C_1 + C_2\cdot 0) + C_2\cdot e^{4\cdot 0} + 0\cdot e^{4\cdot 0} + 2\cdot 0^2\cdot e^{4\cdot 0} = 1$$

$$4C_1 + C_2 = 1 \xRightarrow[C_1=0]{} \underline{C_2 = 1}$$

ולכן, הפתרון הפרטי המבוקש הוא:

$$\underline{\underline{y}} = xe^{4x} + \frac{1}{2}x^2e^{4x} = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{4x}}}$$

(4.2) $$y = -\frac{11}{8}\cos x + 4\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x$$