

## תרגיל 5

1. עבור האידיאלים הבאים קבעו האם הם ראשוניים והאם הם מקסימליים.  
(א)  $I = \langle 4x + 1 \rangle \triangleleft \mathbb{Z}[x]$   
(ב)  $I = \langle \overline{x+1} \rangle \triangleleft \mathbb{Z}_3[x] / \langle x^4 - 16 \rangle$  כאשר בסימון  $\overline{x+1}$  הכוונה לתמונה של  $x+1$  בהטלה לחוג המנה. רמז: אפשר להשתמש במשפט השאריות הסיני.
2. תנו דוגמא לחוג קומוטטיבי שיש לו בדיוק  $n$  אידיאלים ראשוניים נאותים שונים.
3. הוכיחו שחיתוך של שני אידיאלים שאף אחד מהם אינו מוכל בשני, אינו אידיאל ראשוני.
4. הוכיחו שאידיאל ראשוני בחוג קומוטטיבי מכיל את כל האיברים הנילפוטנטיים.
5. יהי  $f : R \rightarrow S$  הומומורפיזם שאינו בהכרח על בין חוגים קומוטטיביים. הוכחו שלכל אידיאל ראשוני  $P \triangleleft S$ ,  $f^{-1}[P]$  הוא אידיאל ראשוני של  $R$ .