אינפי 3

הגדרה: הקבוצה $\mathbb{R}^n$ מאה, היא אוסף $\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n), x_i\in\mathbb{R}\}$.

הגדרה: בסיס סטנדרטי ב-$\mathbb{R}^n$: הוא אוסף הוקטורים
$e_1=(1,\dots,0)$
$e_2=(0,1,\dots,0)$
$e_n=(0,\dots,1)$

כל וקטור $x\in\mathbb{R}^n$ ניתן לרשום $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$.

הגדרה: מכפלה סקלרית: $x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$.

הגדרה: נורמה: $\|x\|=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

משפט (אי שוויון קושי-שוורץ): לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $|x\cdot y|\le\|x\|\cdot\|y\|$.

למה: הנורמה מקיימת את התכונות הבאות: 1) $\|x\|\ge 0$ ו- $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$.
2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$. 3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (אי-שוויון המשולש).

הגדרה: נגדיר מרחק בין שני נקודות $x,y\in\mathbb{R}^n$ ע"י $d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

הערה: מרחק $d(x,y)$ מקיים את התכונה הבאה. לכל $x,y,z\in\mathbb{R}^n$

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y).$$

הגדרה: אם $a\in\mathbb{R}^n$ ו- $r>0$, אז כדור פתוח עם מרכז ב-a ורדיוס r מוגדר ע"י: $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n: d(x,a)<r\}$. כדור סגור: $\bar{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n, d(x,a)\le r\}$.

הגדרה: תיבה פתוחה: ב-$\mathbb{R}^n$ היא קבוצה מן הצורה $\{x\in\mathbb{R}^n: a_i<x_i<b_i, 1\le i\le n\}$.

תיבה סגורה: $\{x\in\mathbb{R}^n: a_i\le x_i\le b_i\}$. אם $a_i-b_i=h$ לכל i אזי הקבוצה נקראת קוביה.

סדרות ב-$\mathbb{R}^n$:

הגדרה: אם $x_k\in\mathbb{R}^n$ לכל $k\in\mathbb{N}$ אזי אומרים שמוגדרת סדרה $\{x_k\}$ של נקודות מ-$\mathbb{R}^n$.

הגדרה: נאמר שסדרה $\{x_k\}\in\mathbb{R}^n$ מתכנסת ל- $a\in\mathbb{R}^n$

אם לכל טרם קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $K\geq N$ מתקיים $d(X_K,a)<\varepsilon$.

במקרה הזה ל-a קוראים גבול הסדרה ומסמנים $\lim\limits_{K\to\infty} X_K=a$

משפט: $\vec{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{a} \iff a_i \xleftarrow[n\to\infty]{} X_i^n$ לכל $1\leq i\leq n$.

הגדרה - סדרה $\{X_K\}$ נקראת סדרה חסומה אם קיים $M>0$ כך שלכל $K\in\mathbb{N}$ $\|X_K\|\leq M$.

הגדרה: סדרה $\{X_K\}$ נקראת סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,K\geq N$ מתקיים: $d(X_K,X_m)<\varepsilon$.

משפט: אם $\{X_K\}$ מתכנסת אזי היא חסומה..

משפט: סדרה $\{X_K\}$ מתכנסת $\iff$ היא סדרת קושי.

משפט בולצנו ווירשטראס: לכל סדרה חסומה של נקודות מ-$\mathbb{R}^n$ יש תת-סדרה מתכנסת.

משפט: כל שתי נורמות ב-$\mathbb{R}^n$ שקולות.

הגדרה: תהי $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ונניח $x\in\mathbb{R}^n$.

א) x נקראת נקודה פנימית אם קיים כדור פתוח עם מרכז ב-x המוכל ב-E.

ב) x נקראת נקודה חיצונית של E אם קיים כדור פתוח עם מרכזו ב-x המוכל ב-E^c.

ג) אם x איננו פנימית ואינו חיצונית אזי נאמר ש-x נקודת שפה של E.

איחוד של כל נקודות השפה של E ומסמנים ע"י ∂E.

ד) $x\in E$ נקראת נקודה מבודדת של E אם קיים כדור פתוח עם מרכזו ב-x שלא מכיל שום נקודה מ-E מלבד x.

ה) x נקראת **נקודה גבולית של E** אם בכל כדור פתוח עם מרכזו ב-x קיימת נקודה מ-E השונה מ-x. האוסף של כל הנקודות הגבוליות של E מסומן E'.

<u>הערה:</u> לכל קבוצה $E\cup E' = E\cup \partial E$ (לא בהכרח ש $E'=\partial E$).

<u>הגדרה:</u> הקבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ נקראת **קבוצה פתוחה** אם כל נקודה שלה היא נקודה פנימית. [<u>הערה:</u> $\emptyset$ ו-$\mathbb{R}^n$ הינן קבוצות פתוחות]

<u>משפט:</u> איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{R}^n$ הוא קבוצה פתוחה.

חיתוך של מספר <u>סופי</u> של קבוצות פתוחות היא גם קבוצה פתוחה.

<u>הגדרה:</u> תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה לא ריקה. קבוצת הנקודות הפנימיות של E נקראת **הפנים של E** וסימונה $\text{int}(E)$.

<u>משפט:</u> לכל $E\neq\emptyset$: הקבוצה $\text{int}E$ היא קבוצה פתוחה.

<u>הגדרה:</u> תהי $x\in\mathbb{R}^n$. לקבוצה הפתוחה המכילה את x קוראים **הסביבה של x**.

<u>הגדרה:</u> קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ נקראת **סגורה** אם E^c פתוחה

<u>הערה:</u> יש קבוצות לא סגורות ולא פתוחות $(0,1]$.

<u>משפט:</u> חיתוך כלשהו של קבוצות סגורות ב-$\mathbb{R}^n$ היא קבוצה סגורה.

האיחוד של מספר סופי של קבוצות סגורות ב-$\mathbb{R}^n$ היא קבוצה סגורה.

<u>משפט:</u> קבוצה $F\subset\mathbb{R}^n$ היא קבוצה סגורה $\Leftrightarrow$ היא מכילה את כל הנקודות הגבוליות שלה.

<u>הגדרה:</u> הקבוצה $E'\cup E$ נקראת **הסגור של E** וסימונה $\bar{E}$

<u>למה:</u> לכל קבוצה E, $\bar{E}$ היא קבוצה סגורה.

<u>הגדרה:</u> הקבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ נקראת **קבוצה חסומה** אם קיים כדור המכיל את E

<u>הגדרה:</u> תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה חסומה ולא ריקה. אזי המספר

$\operatorname{diam} E=\sup_{x,y\in E}\|x-y\|$ נקרא **הקוטר** של E.

<u>הגדרה:</u> קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}^n$ נקראת **קומפקטית**.

<u>משפט (הלמה של קנטור):</u> תהא $\{E_k\}$ סדרת של קבוצות קומפקטיות לא ריקות ב-$\mathbb{R}^n$ כך שמתקיים: $E_{k+1}\subset E_k$ לכל $k\in\mathbb{N}$.
אם $\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}E_k=0$ אזי החיתוך $\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$ מכיל נקודה אחת ויחידה.

<u>הגדרה:</u> נאמר שאוסף הקבוצות $\{E_j\}$ הוא **כיסוי של הקבוצה A** אם $A\subset\bigcup_j E_j$. נאמר שהכיסוי הוא **פתוח** אם כל הקבוצה E_j פתוחה.

<u>משפט:</u> הקבוצה $K\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית $\iff$ מכל כיסוי פתוח שלה ניתן להוציא תת-כיסוי סופי.

<u>משפט:</u> הקבוצה $K\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית $\iff$ לכל סדרה $\{x_i\}\subseteq K$ קיימת תת סדרה מתכנסת לגבול ששייך ל-K.

<u>הגדרה:</u> תהי $\emptyset\neq E\subset\mathbb{R}^n$. נאמר שעל E מוגדרת **פונקציה** f עם ערכים ב-$\mathbb{R}^m$ אם לכל $x\in E$ מתאים וקטור יחיד מ-$\mathbb{R}^m$ לפי חוק נתון מראש. נסמן $f:E\to\mathbb{R}^m$.

אם $m=1$ אז נאמר ש-f **ממשית**. אם $m\geq 2$ אז נאמר ש-f **וקטורית**.

<u>הגדרה: (גבול לפי קושי):</u> תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ ונניח ש-a נקודה גבולית של E. תהי $f:E\to\mathbb{R}^m$. נאמר ש-$b\in\mathbb{R}^m$ הוא **גבול**

פונקציה f בנקודה a מעל E. אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in E$ כך ש $0<\|x-a\|<\delta$ מתקיים: $\|f(x)-b\|<\varepsilon$.

נסמן זאת ע"י $\lim_{x\to a, x\in E} f(x)=b$.

הגדרה: (גבול לפי היינה): נאמר ש $b\in\mathbb{R}^m$ הוא גבול הפונקציה f בנקודה a מעל E אם לכל סדרה $\{x_k\}\subseteq E$, $x_k\neq a$ כך ש- $\lim_{k\to\infty} x_k=a$ מתקיים $\lim_{k\to\infty} f(x_k)=b$.

למה: נניח ש $f=(f_1,\dots,f_m)$ ו $b=(b_1,\dots,b_m)$ אזי $\lim_{x\to a, x\in E} f(x)=b$ $\iff$ $\lim_{x\to a, x\in E} f_i(x)=b_i$ לכל $i=1,\dots,m$.

משפט: הגדרות הגבול לפי היינה וקושי שקולות זו לזו.

מסקנה: אם לפונקציה f יש גבולות לפי מסלולים שונים של התקרבות x ל- a אזי ל- f אין גבול ב- a.

משפט: נניח ש- $E\subseteq\mathbb{R}^n$, $f,g:E\to\mathbb{R}^m$ ו- a נקודה גבולית של E ונניח ש $\lim_{x\to a, x\in E} f(x)=b$, $\lim_{x\to a, x\in E} g(x)=c$ אזי: (1) חיבור קיים (2) כפל קיים. אם f ו- g פונקציות ממשיות ו $g(x)\neq 0$, $c\neq 0$
$\lim_{x\to a, x\in E}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}$.

הגדרה: לכל y קבוע נגדיר $\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ ונעבור לגבול כאשר $y\to y_0$: $\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$. באופן דומה ניתן להגדיר $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ לגבולות האלה קוראים **גבולות חוזרים**.

משפט: נניח שקיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ ולכל y מסביבת הנקודה y_0 קיים הגבול $\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, אזי קיים $\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$ והוא שווה ל- L.

הגדרה: נניח ש- $f: E\to\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$ ו- $x_0\in E$. נאמר ש- f **רציפה ב- x_0** אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in E$ המקיים $\|x-x_0\|<\delta$ מתקיים $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$.

הערה: אם x_0 נקודה מבודדת אז כל פונקציה רציפה בנקודה כזאת.

למה: פונקציה f רציפה ב- x_0 $\Longleftrightarrow$ כל הרכיבים שלה רציפים ב- x_0.

למה: נניח ש- $f,g: E\to\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$. אם f ו- g רציפות אזי סכומן ומכפלתן רציפות ב- x_0, ואם הן ממשיות ו- $g\neq 0$ על E אזי f/g רציפות ב- x_0.

הגדרה: נאמר ש- f **רציפה ב- E** אם היא רציפה בכל נקודה ב- E.

משפט: תהי $f: E\to\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$ ונניח ש- $g: N\to\mathbb{R}^k$, $N\subset\mathbb{R}^m$. אם f רציפה ב- $x_0\in E$ ו- g רציפה ב- $y_0=f(x_0)\in N$ אזי $h=g\circ f$ רציפה ב- x_0.

הגדרה: תהי $f: E\to\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$. נאמר ש- f **חסומה** אם קיים $M>0$ כך ש- $\|f(x)\|<M$ לכל $x\in E$.

משפט ויירשטראס I: תהי $K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית ונניח ש- $f: K\to\mathbb{R}^m$ רציפה אזי f חסומה על K.

משפט ויירשטראס II: תהי $f: K\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כאשר $K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית אזי קיימים $x',x''\in K$ כך ש- $f(x'')=\inf_{x\in K} f(x)$, $f(x')=\sup_{x\in K} f(x)$.

הגדרה: נאמר שקבוצה $A\subset\mathbb{R}^n$ **פתוחה ביחס ל- $B\subset\mathbb{R}^n$** אם קיימת קבוצה פתוחה $G\subset\mathbb{R}^n$ כך ש- $A=B\cap G$.

משפט: תהי $f: E\to\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$ פונקציה רציפה. אזי לכל קבוצה פתוחה $H\subset\mathbb{R}^m$ הקבוצה $f^{-1}(H)=\{x\in E: f(x)\in H\}$ פתוחה ב- E.

משפט: תהי $K\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית ונניח $f: K\to\mathbb{R}^m$ פונקציה רציפה. אזי $f(K)$ היא קבוצה קומפקטית.

הגדרה: תהי $f:E\to\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$ נאמר ש-f **רציפה במידה שווה** אם

27 לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x',x''\in E$ כאלה ש-$\|x'-x''\|<\delta$ מתקיים $\|f(x')-f(x'')\|<\varepsilon$.

משפט קנטור: תהי $K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית אם $f:K\to\mathbb{R}^m$ רציפה אזי היא רציפה במידה שווה על K.

הגדרה: פונקציה רציפה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ נקראת **קו רציף** (או עקומה או מסילה) ב-$\mathbb{R}^n$.

הגדרה: קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ נקראת **קשירה מסילתית** אם ניתן לחבר כל שתי נקודות בה ע"י קו רציף שנמצא כולו בתוך הקבוצה. [הערה: בקורס שלנו קשירה כלומר קשירה מסילתית]

הגדרה: קבוצה פתוחה וקשירה נקראת **תחום**.

משפט: תהי $f:E\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקבוצה קשירה $E\subset\mathbb{R}^n$ ויהיו A,B שתי נקודות ב-E. לכל מספר ממשי α שנמצא בין $f(A)$ ל-$f(B)$ קיימת נקודה $C\in E$ כך ש-$f(C)=\alpha$.

הגדרה: **פונקציה לינארית** $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מהצורה $A(x)=a_1x_1+\dots+a_nx_n$.

הגדרה: תהי $f:E\to\mathbb{R}$ כאשר $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ונניח ש-$x_0\in E$. פונקציה f **דיפרנציאבילית** בנקודה x_0 אם קיימת פונקציה לינארית $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-A(h)}{\|h\|}$$

לפונקציה A קוראים **הנגזרת של f ב-x** ומסמנים על ידי $f'(x_0)$ הדיפרנציאל של f ב-x_0. מסמנים ע"י $df(x_0)$ $A=f'(x_0)(h)$

הערה: ניתן להגדיר ש-f דיפרנציאבילית ב-x_0 אם קיימת פונקציה לינארית A כך ש-$f(x_0+h)=f(x_0)+A(h)+r(h)$ כאשר $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|}=0$.

הגדרה: **היפר מישור** ב-$\mathbb{R}^n$ היא קבוצת הנקודות $x\in\mathbb{R}^n$ המקיימות $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=c$ כאשר $a_i\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$.

הגדרה: תהי $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subseteq\mathbb{R}^n$. **גרף הפונקציה** $\{(x_1,\dots,x_n,f(x_1,\dots,x_n)) \mid (x_1,\dots,x_n)\in E\}$.

הגדרה: תהי $Q\subseteq\mathbb{R}^n$. **המרחק** של $x_0\in\mathbb{R}^n$ עד Q מוגדר ע"י $d(x_0,Q)=\inf_{y\in Q}\{\|y-x_0\|\}$.

הגדרה: תהי $f:E\to\mathbb{R}$ כאשר $E\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש-Q הגרף של f. היפר מישור H ב-$\mathbb{R}^{n+1}$ נקרא **משיק ל-Q** בנקודה $w_0=(x_0,f(x_0))$ אם H עובר דרך w_0 ומתקיים

$$\lim_{w\to w_0,\, w\in H}\frac{d(w,Q)}{\|w-w_0\|}=0$$

למה: תהי $f:E\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית ב-$x_0\in E$. אזי ב-$w_0=(x_0,f(x_0))$ קיים היפר מישור משיק לגרף f והמשוואה היא $z=f(x_0)+(f'(x_0))(x-x_0)$.

למה: אם f דיפרנציאבילית ב-x_0 אזי היא רציפה בנקודה זו.

הגדרה: תהי $f:E\to\mathbb{R}$ כאשר $E\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. תהי $x_0\in E$ (אם קיים הגבול $\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t}$ אזי היא נקראת **הנגזרת החלקית** של f לפי x_i בנקודה x_0 ומסומן ע"י $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$

משפט: תהי $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח $x_0\in E$. אם ל-f קיימות הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ בסביבת הנקודה x_0 והן פונקציות רציפות בסביבה זו, אזי f דיפרנציאבילית ב-x_0.

משפט: תהי $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. אם f
דיפרנציאבילית ב- $x_0\in E$ אזי קיימות הנגזרות החלקיות
שלה ומתקיים $f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)h_n+r(h)$
כאשר $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|}=0$.

הגדרה: תהי $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. יהי $v\in\mathbb{R}^n$ יחידה
כלומר $\|v\|=1$ אם קיים הגבול $\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}=D_vf(x_0)=\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$
אזי הוא נקרא **הנגזרת הכיוונית** של f ב- x_0. בכיוון v
אם $v=e_j$, אז נקבל $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

משפט: תהי $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש- f דיפרנציאבילית
ב- $x_0\in E$. אזי קיימת נגזרת כיוונית לכיוון לכל v ומתקיים
$$D_vf(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)v_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)v_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)v_n$$

הגדרה: לוקטור $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$ קוראים **גרדיאנט** של f ב- x_0
ומסמנים ע' ומסמנים ע"י $\text{grad}(f(x_0))$ או $\nabla f(x_0)$.

למה: נגזרת כיוונית $D_vf(x_0)$ מקבלת ערך מקסימלי בכיוון
של $\text{grad}(x_0)$ $\|\text{grad} f(x_0)\|\neq 0$

הגדרה: נניח ש $a,b\in\mathbb{R}^n$ **הקטע $[a,b]$** הוא אוסף של נקודות

משפט לגרנז': תהי $f:E\to\mathbb{R}$ $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש- f
דיפ' בכל נקודה בקטע $[a,b]\subset E$ אזי קיימת נקודה $\xi\in[a,b]$
כך ש- $f(b)-f(a)=f'(\xi)^{(b-a)}$
פונקציה לינארית.

משפט: תהי $f:E\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית על קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית $E\subset\mathbb{R}^n$ אם $f'(x)=0$ לכל $x\in E$ אזי f קבועה ב-

הגדרה: תהי $f:E\to\mathbb{R}^m$ כאשר $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נאמר ש-f דיפרנציאבילית ב-$x_0\in E$ אם קיימת פונקציה לינארית $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש-:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-A(h)\|}{\|h\|}=0$$

~~…~~ לפונקציה $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ הנגזרת של f ב-x_0 מסומנים ע"י $f'(x_0)$ למטריצה של A קוראים מטריצת יעקובי.

למה: פונקציה f דיפרנציאבילית ~~…~~ ב-x_0 $\iff$ פונקציה f_i דיפרנציאבילית ב-x_0, כמו כן, אם f דיפרנציאבילית ב-x_0 מטריצת יעקובי מוגדרת ע"י:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

הערה: אם $m=n$ אזי הדטרמיננטה של מטריצת יעקובי נקראת יעקוביאן וסימונה $J_f(x_0)$.

משפט: (כלל השרשרת): יהי $E\subset\mathbb{R}^n$, $N\subset\mathbb{R}^m$ קבוצות פתוחות תהי $g:E\to N$ פונקציה דיפרנציאבילית ב-x_0, $y_0=g(x_0)$ אזי $F(x)=f(g(x))$ דיפרנציאבילית ב-x_0 ומתקיים $F'(y_0)=f'(x_0)(g'(x_0))$

משפט (שוורץ): תהי f פונקציה ממשית המוגדרת בסביבת הנקודה x_0 ובסביבה זו קיימות הנגזרות $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ אם $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ומתקיים $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

הגדרה: תהי $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נאמר ש-$f\in C^k$, $k\in\mathbb{N}$ אם ל-f קיימות כל הנגזרות החלקיות

טז סדר k ויהן פונקציות רציפות.

__הגדרה:__ נניח ש- $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נגדיר דיפרנציאל של f ב- x_0 מסדר k על ידי

$$D^{(k)} f(x_0)(h) = \sum_{i} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} (x_0) h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

__הפולינום של טיילור:__

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D^{(k)} f(x_0)(x - x_0)$$

__הגדרה:__ נניח ש $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ כאשר $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

נסמן $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ $\quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

__משפט (מולטינום):__ לכל $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ולכל $k \in \mathbb{N}$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k = \sum_{\forall \alpha . |\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$$

__משפט (טיילור עם שארית לגראנז'):__ תהי $f \in C^{m+1}(E)$ כאשר $E \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש- $[x, x_0] \subseteq E$ אז

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha + R_m(x)$$

כאשר: $\exists 0 \le \theta$ $\quad R_m(x) = \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^\alpha$.

__משפט (טיילור עם שארית פאנו):__ תהי $f \in C^m(E)$ כאשר $E \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש- $[x, x_0] \subseteq E$. תהי $f \in C^m(E)$ כאשר

$E \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש- אזי $f(x) = \sum \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha + R_m(x)$

כאשר $R_m(x) = r_m(x) \|x - x_0\|^m$ ו- $\lim_{k \to \infty} r_m(x) = 0$

__הגדרה:__ תהי $f: E \to \mathbb{R}$ כאשר $E \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נאמר

ש- f מקבלת את __המקסימום המקומי__ ב $x_0 \in E$ אם קיים

סביבה U של x_0 כך ש $f(x)\le f(x_0)$ לכל $x\in U$ באופן דומה מגדירים את המינימום המקומי.

<u>משפט</u>: תהי $f:E\to\mathbb{R}$ כאשר $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. אם ל-f יש אקסטרמום מקומי ו-f דיפרנציאבילית ב-x_0 אזי $df(x_0)=0$.

<u>משפט (הפונקציה ההפוכה)</u>: תהי $f:E\to\mathbb{R}^n$ כאשר $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש-$f\in C^1(E)$ נניח ש-$a\in E$ ו-$J_f(a)\neq 0$ אזי קיימת סביבה $U\subset E$ של a כך ש-f חח"ע על U התמונה $V=f(U)$ היא קבוצה פתוחה והפונקציה ההפיכה $f^{-1}:V\to U$ שייכת ל-$C^1(V)$.

~~הבהלה~~ <u>הערה</u>: משוויון $(f^{-1})'(y)=(f'(x))^{-1}$ נקבל ש $J_{f^{-1}}(y)=\frac{1}{J_f(x)}$

<u>הערה</u>: אם $J_f(a)=0$ ו-f^{-1} קיימת אזי f^{-1} לא דיפרנציאבילית ב-$y=f(a)$.

<u>מסקנה</u>: תהי $f:E\to\mathbb{R}^n$ כאשר $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה נניח ש $f\in C^1(E)$ ו-$J_f(x)\neq 0$ לכל $x\in E$ אזי התמונה של כל קבוצה פתוחה $G\subset E$ היא קבוצה פתוחה.

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(x,y)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y)\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y)\end{vmatrix}$$

<u>משפט הפונקציה הסתומה</u>: תהי $E\subset\mathbb{R}^{n+m}$ קבוצה פתוחה תהי $f:E\to\mathbb{R}^m$ ונניח ש-$f\in C^1(E)$. נניח שעבור $(x_0,y_0)\in E$ מתקיים $f(x_0,y_0)=0$ ו- $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(x_0,y_0)\neq 0$. אזי קיימות סביבות A

Scanned by CamScanner

של x_0 ו- B של y_0 כך שמתקיים: א) לכל $x\in A$ קיימת נקודה יחידה $y=g(x)\in B$ כך ש- $f(x,g(x))=0$. ב) הפונקציה $g:A\to B$ שייכת ל-C^1.

למה: נניח ש $A\times B$ הסביבה של (x_0,y_0) כך שבה מתקיים משפט הפונקציה הסתומה ו $\frac{\partial(f_1\ldots f_m)}{\partial(y_1\ldots y_m)}(x,y)$ נניח ש-g הפונקציה הסתומה שמוגדרת ב- A אזי מתקיים $g'(x)=-\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))$

הערה: אם $m=1$ אזי הלמה אומרת ש $\operatorname{grad} g(x)=-\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))}\operatorname{grad}_x f(x,y(x))$

הגדרה: תהי $E\subset\mathbb{R}^k$ ונניח ש- $f:E\to\mathbb{R}^{n-k}$ כאשר $1\le k<n$. הגרף של f היא הקבוצה ב-$\mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי $\{(y,f(y)):y\in E\}$.

הגדרה: נניח ש- $1\le k<n$ קבוצה $M\subset\mathbb{R}^n$ נקראת משטח k-מימדי ששייך ל-C^1 אם לכל נקודה $a\in M$ קיימת סביבה U_a כך ש $U_a\cap M$ היא הגרף של פונקציה כלשהי $f:E\to\mathbb{R}^{n-k}$ כאשר $E\subset\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה ו-$f\in C^1(E)$ כלומר $U_a\cap M=\{(y,f(y)):y\in E\}$.

משפט: נניח ש $1\le k<n$. קבוצה $M\subset\mathbb{R}^n$ היא משטח k מימדי ששייך ל-C^1 $\iff$ לכל נקודה $a\in M$ קיימת סביבה U_a וקיימת פונקציה $g:U_a\to\mathbb{R}^{n-k}$ כך ש $g\in C^1(U_a)$ ו $\operatorname{rank} g'(x)=n-k$ לכל $x\in U_a$ ו $U_a\cap M=\{x\in U_a: g(x)=0\}$

הגדרה: נאמר שהנקודה x_0 היא נקודה קריטית אם עשוי להיות שם אקסטרמום מקומי.

הגדרה: פונקציה של המשתנים מהצורה $\Phi(x_1..x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ כאשר $a_{ij}=a_{ji}$ נקרא תבנית ריבועית לכל תבנית ריבועית מתאים מטריצה סימטרית.

הגדרה: נאמר שתבנית Φ חיובית (שלילית) אם $I(a)>0$ ($I(a)<0$)

אם Φ מקבלת ערכים חיובים ושליליים אזי היא מעורבת

משפט סילבסטר: I) תבנית Φ חיובית $\Leftrightarrow$ כל המינורים הראשיים של המטריצה חיוביים

II) תבנית Φ שלילית $\Leftrightarrow$ הסימנים של המינורים הראשיים מתחלפים לסירוגין כאשר הראשון נהיה שלילי כלומר $A_1<0, A_2>0, A_3<0$

משפט: נניח ש-$f\in C^2(E)$ כאשר $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש-$x_0\in E$ נקודה קריטית של f. נגדיר תבנית $I_{x_0}(h)=\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j$. אם Φ_{x_0} חיובית (שלילית) אזי ב-x_0 ל-f יש מינימום (מקסימום) מקומי. אם Φ_{x_0} מעורבת אזי ל-f אין אקסטרמום ב-x_0.

משפט: תהי $f(x,y)$ פונקציה מוגדרת בסביבה בנקודה (x_0,y_0) ונניח ש-f שייכת ל-C^2 בסביבה זו. תהי (x_0,y_0) נקודה קריטית של f נסמן $\Delta=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right)^2$

ונניח ש- $\Delta>0$ אזי ל-f יש מינימום מקומי ב-(x_0,y_0) אם $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$ ומקסימום מקומי אם $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$

$\Delta<0$ אז ל-f אין אקסטרמום מקומי ב-(x_0,y_0).

הערה: אם $\Delta=0$ אז אי אפשר להגיד משהו מסוים לגבי האקסטרמום

הגדרה: אקסטרמום של פונקציות שהמשתנים שלהן מקיימים תנאים נוספים נקרא אקסטרמום עם אילוצים.

Scanned by CamScanner

31 **הגדרה:** תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ונניח ש- $f:E\to\mathbb{R}$
ו- $g:E\to\mathbb{R}^m$ ונניח ש- $x_0\in E$ ו- $g(x_0)=0$ נאמר ש- $f(x_0)$
היא מקסימום (מינימום) מקומי של f ב- E תחת האילוץ $g(x)=0$
אם קיימת סביבה $B\subset E$ של x_0 כך ש- $f(x_0)\geq f(x)$ ($f(x_0)\leq f(x)$)
לכל $x\in B$ כאלה ש- $g(x)=0$.

משפט: תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, נניח יהיו f ו- g פונקציות ממשיות המוגדרות על E ושייכות ל- $C^1(E)$. יהי $f(x_0)$ ערך קיצון של f ב- E תחת האילוץ $g(x)=0$ נניח $\text{grad}\, g(x_0)\neq 0$.
אזי קיים מספר λ_0 כך שמתקיים $\text{grad}(f+\lambda_0 g)(x_0)=0$.

שיטת כופלי לגרנז': (כמובן) א) נרשום מערכת של $(n+1)$ משוואות ב- $(n+1)$ נעלמים: $j=1,\dots,n$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)=0\\ g(x)=0\end{cases}$$

ב) לכל (x_0,λ_0) אחד מהפתרונות אז x_0 היא נקודה חשודה.

משפט: תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש- $f:E\to\mathbb{R}$
ו- $g:E\to\mathbb{R}^m$ כאשר $n>m\geq 1$. נניח ש- f ו- g שייכות ל- $C^1(E)$
יהי $f(x_0)$ ערך קיצון של f ב- E תחת האילוץ $g(x)=0$ ונניח
ש- $\text{rank}\, g'(x_0)=m$ אזי קיימים מספרים $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ כך שמתקיים
$\text{grad}(f+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i)(x_0)$

סימונים: $M=\{x\in\mathbb{R}^n \; g(x)=0\}$. נגדיר $T_{x_0}=\{h\in\mathbb{R}^n \; g'(x_0)(h)=0\}$. ל- T_{x_0} קוראים
מרחב משיק ל- M ב- x_0. מתקיים: $\text{rank}\, g'(x_0)=m$ נקבל ש- T_{x_0}
הוא מרחב לינארי $n-m$ מימדי.
נגדיר
$$L(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$$

משפט: יהיו $f,g\in C^2(E)$. נגדיר תבנית $\Phi_{x_0}(h)=\sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_i h_j$

אם Φ_{x_0} חיובית על T_{x_0} אז ל-f ב-x_0 יש מינימום

אם Φ_{x_0} שלילית על T_{x_0} אז ל-f יש מקסימום.

אם Φ_{x_0} מעורבת על T_{x_0} אז ל-f ב-x_0 אין אקסטרמום.

הגדרה: הנפח (המידה) של I (תיבה) מוגדר ע"י $\mu(I)=\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$

נסמן על ידי $d(I)$ הקוטר של I כלומר $d(I)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)^2}$

הגדרה: תהי $I\subset\mathbb{R}^n$ תיבה. נסמן על ידי P החלוקה של I למספר סופי של תיבות $I_1,...,I_k$ למספר $\lambda(P)=\max_{1\le l\le k} d(I_l)$.

הגדרה: תהי $P=\{I_1,...,I_k\}$ חלוקה של I. תהי $f:I\to\mathbb{R}$ נבחר באופן שרירותי נקודות $\xi_l\in I_l$ נסמן $\xi=(\xi_1,...,\xi_k)$ לסכום לסכום $\sigma(f,P,\xi)=\sum_{l=1}^{k} f(\xi_l)\mu(I_l)$. נקרא הסכום האינטגרלי של רימן המתאים לחלוקה P ולבחירת הנקודות ξ.

הגדרה: אם קיים הגבול הסופי $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)$ והוא בלתי תלוי בחלוקת P ובנקודות ξ אז נאמר ש-f אינטגרבילית.

משפט: אם f אינטגרבילית על I אזי היא חסומה שם.

הגדרה: תהי f מוגבלת על I ותהי $P=\{I_l\}$ חלוקה של I נסמן $M_l=\sup_{I_l} f$, $m_l=\inf_{I_l} f$.

הגדרה: סכום עליון (תחתון) של f ביחס ל-P: $S(f,P)=\sum_l M_l\mu(I_l)$

$(s(f,P)=\sum_l m_l\mu(I_l))$.

<u>למה:</u> עבור הסכומים S' ו-S מתקיים:

א) $S'(f,P) = \sup \sigma(f,P,\xi) \geq \inf \sigma(f,P,\xi) = S(f,P)$.

ב) אם P' העדנה של P אזי $S(f,P) \leq S(f,P') \leq S'(f,P') \leq S'(f,P)$

ג) לכל שתי חלוקות P_1, P_2 של I מתקיים: $S(f,P_1) \leq S'(f,P_2)$

<u>הגדרה:</u> <u>האינטגרל התחתון של f מעל I</u> מוגדר ע"י $\underline{J} = \sup_P S(f,P)$

<u>האינטגרל העליון של f מעל I</u> מוגדר ע"י $\overline{J} = \inf_P S'(f,P)$

<u>הערה:</u> מ-(ג) של הלמה נובע ש- $\underline{J} \leq \overline{J}$.

<u>משפט:</u> תהי f חסומה על I. אזי היא אינטגרבילית על I

$\iff \lim_{\lambda(P)\to 0} S'(f,P) - S(f,P)$

<u>משפט (קריטריון דרבו):</u> תהי f מוגדרת על I. אזי

f אינטגרבילית על I $\iff$ f חסומה על I ומתקיים $\underline{J} = \overline{J}$.

<u>הגדרה:</u> נאמר שקבוצה $E \subset \mathbb{R}^n$ היא בעלת <u>מידה אפס</u> אם

לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי בן מניה של תיבות $\{I_j\}$ המכסה את E

כך ש- $\sum_j \mu(I_j) < \varepsilon$.

<u>למה:</u> א) כל קבוצת נקודות סופית ב-$\mathbb{R}^n$ היא בעלת מידה אפס.

ב) האיחוד של מס' סופי או בן-מניה של קבוצות ממידה אפס היא

קבוצה ממידה אפס.

<u>מסקנה:</u> קבוצה של כל נקודה רציונלית ב-$\mathbb{R}^n$ היא קבוצה ממידה אפס.

<u>הערה:</u> $\mu(E) = 0 \not\Rightarrow E$ בת מניה. לדוג': קבוצת קנטור.

<u>למה:</u> תהי $\phi: I \to \mathbb{R}$ פונק' רציפה כאשר I תיבה ב-$\mathbb{R}^{n-1}$

אזי הגרף של f על I הוא בעל מידה אפס.

<u>מסקנה:</u> נובע שאם $I\subset\mathbb{R}^n$ תיבה אזי ∂I היא בעלת מידה אפס ב-$\mathbb{R}^n$

<u>משפט לבג:</u> תהי $I\subset\mathbb{R}^n$ תיבה ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונק' חסומה על I אזי f אינטגרבילית על I $\Longleftrightarrow$ קבוצת נק' אי-הרציפות של f היא בעלת מידה אפס.

<u>הגדרה:</u> תהי $f:E\to\mathbb{R}$ כאשר $E\subset\mathbb{R}^n$ <u>התנודה</u> של f ב-E מוגדרת ע"י $\omega(f;E)=\sup_{x_1,x_2\in E}|f(x_1)-f(x_2)|$.

התנודה של f בנקודה $x\in E$ מוגדרת ע"י $\omega(f;x)=\lim_{\delta\to0}\omega(f;E\cap B(x,\delta))$

<u>הערה:</u> הפונק' $\varphi(\delta)=\omega(f;E\cap B(x,\delta))$ לא עולה, לכן הגבול שמגדיר את $\omega(f;x)$ מוגדר.

<u>טענה:</u> פונק' f רציפה ב-x $\Longleftrightarrow$ $\omega(f;x)$

<u>למה:</u> תהי f חסומה על I תיבה אזי לכל ε הקבוצה $\{x\in I:\omega(f;x)\geq\varepsilon\}$ היא קבוצה סגורה.

<u>הגדרה:</u> נאמר שקבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ היא קבוצה <u>קבילה</u> אם היא חסומה ו-∂E היא בעלת מידה אפס.

<u>למה:</u> איחוד או חיתוך סופי של קבוצות קבילות גם קבילה. טוט' פצ' שיהיה חסום

ההפרש של שתי קבוצות קבילות גם קבילה.

<u>הגדרה:</u> תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה. <u>פונקציה מציינת</u> של E מוגדרת ע"י

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

<u>טענה:</u> לכל קבוצה E הקבוצה של נק' אי-הרציפות של χ_E

היא בדיוק ∂E..

<u>הגדרה:</u> תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קבילה ותהי $f:E\to\mathbb{R}$. נאמר ש-f אינטגרבילית על E אם קיים האינטגרל $\int_E f(x)dx=\int_I f\chi_E(x)dx$.

<u>למה:</u> נניח ש-$E\subset I_1$ והאינטגרל $\int_{I_1} f\chi_E\,dx$ קיים. אזי לכל ~~קופסה~~ תיבה I_2 כלולת ש-$E\subset I_2$ גם קיים האינטגרל $\int_{I_2} f\chi_E\,dx$ ומתקיים.

$$\int_{I_1} f\chi_E\,dx=\int_{I_2} f\chi_E\,dx.$$

<u>הגדרה:</u> תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קבילה. אזי נגדיר מידת ז'ורדן של E, על ידי

$$\mu(E)=\int_E 1dx=\int_E dx.$$

<u>הגדרה:</u> נגדיר צורה אלמנטרית כאיחוד סופי של תיבות I_j, כך ש- $\mathring{I}_j\cap\mathring{I}_l=\emptyset$ כאשר $j\neq l$.

נגדיר:

$$\mu(E)=\sum_{j=1}^{l}\mu(I_j)$$

<u>הגדרה:</u> אם קיים $\int_E dx$ ~~אז~~ נאמר ש-E מדידה ע"פ ז'ורדן.

<u>הגדרה:</u> נאמר שתכונה כלשהי מתקיימת כמעט בכל מקום אם היא מתקיימת בכל נקודה פרט אולי לקבוצה ממידה אפס.

<u>למה:</u> נניח ש-f ו-g אינטגרביליות על E ונניח ש-$c\in\mathbb{R}$ אזי גם $f+g$ אינטגרבילית וגם cf ומתקיים $\int_E(f+g)dx=\int_E f dx+\int_E g dx$!

$$\int_E (cf)dx=c\int_E f dx.$$

<u>למה:</u> תהי f אינטגרבילית על E. אם $f=0$ כמעט בכל מקום ב-E

$$\int_E f dx=0.$$

<u>מסקנה:</u> אם f ! g אינטגרביליות על E, ו $f=g$ כמעט בכל

מקום אזי $\int_E f\,dx=\int_E g\,dx$

למה: אם f אינטגרבילית על E ו- $f\geq 0$ כמעט בכל מקום
אזי $\int_E f\,dx\geq 0$

למה: אם f אינטגרבילית על E ו $f\geq 0$

מסקנה: יהיו f ו- g אינטגרביליות על E.

א. אם $f\leq g$ כמעט בכל מקום. אזי $\int_E f\,dx\leq\int_E g\,dx$

ב. אם $m\leq f\leq M$ אזי $m\mu(E)\leq\int_E f\,dx\leq M\mu(E)$

ג. קיים $\Theta\in[\inf_E f,\sup_E f]$ כך ש- $\int_E f\,dx=\Theta\mu(E)$

למה: (אדיטיביות) יהיו E_1 ו- E_2 קבוצות מדידות ותהי f
אינטגרבילית של E_1 ו E_2 אזי גם אינטגרבילית על $E_1\cup E_2$
אם בנוסף $\mu(E_1\cap E_2)=0$ אזי $\int_{E_1\cup E_2} f\,dx=\int_{E_1} f\,dx+\int_{E_2} f\,dx$

למה: אם $f\geq 0$ ואינטגרבילית על תיבה I
ו- $\int_I f\,dx=0$ אזי $f=0$ כמעט בכל מקום על I.

למה: אם f אינטגרבילית על E אזי גם $|f|$ פונקציה אינטגרבילית
ומתקיים $\left|\int_E f\,dx\right|\leq\int_E |f|\,dx$

משפט (פוביני): יהיו $A\subset\mathbb{R}^n$ ו $B\subset\mathbb{R}^m$ ותהי $f(x,y)$ פונקציה
אינטגרבילית על $A\times B$ אזי האינטגרל $F(x)=\int_B f(x,y)\,dy$
קיים עבור כמעט כל $x\in A$ ומתקיים $\int_A\left(\int_B f(x,y)\,dy\right)dx=\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy$

מסקנה: תהי $I=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ ונניח ש- f אינטגרבילית על I אזי
$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n\dots dx_1=\int_I f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

מסקנה: תהי $D\subset\mathbb{R}^{n}$ קבוצה מדידה ויהיו φ_1, φ_2 פונקציות 34

רציפות על D ו $\varphi_1\le\varphi_2$ $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n}: x\in D, \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$

משפט: תהי $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ותהי $f:[\varphi(a),\varphi(b)]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

הגדרה: תהי $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. פונקציה $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ נקראת C^1-דיפאומורפיזם אם $\varphi\in C^1(\Omega)$, φ חח"ע ו- $\varphi^{-1}\in C^1(\varphi(\Omega))$

!

משפט: תהי $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ונניח ש- $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ היא C^1-דיפאומורפיזם ותהי $f:\varphi(\Omega)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה

אזי לכל קבוצה קומפקטית ומדידה $A\subseteq\Omega$ מתקיים

$$\int_{\varphi(A)} f(x)\,dx=\int_A f(\varphi(t))\,|J_\varphi(t)|\,dt$$

למה: תהי $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש- $\varphi\in C^1(\Omega)$ ו- φ חח"ע. אזי φ היא C^1-דיפאומורפיזם $\iff$ $J\varphi(t)\neq 0$ לכל $t\in\Omega$.

למה: נניח ש- $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה: ו- φ היא C^1-דיפאומורפיזם על Ω. לכל קבוצה קומפקטית $A\subseteq\Omega$ מתקיים $\partial(\varphi(A))=\varphi(\partial A)$

למה: קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ בעלת מידה אפס $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיים כיסוי בן מניה של קוביות $\{Q_j\}$ כך שמתקיים $\sum_j \mu(Q_j)<\varepsilon$.

למה: תהי $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. נניח ש- $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ היא C^1-דיפאומורפיזם. אזי לכל קבוצה קומפקטית ומדידה $A\subseteq\Omega$ הקבוצה $\varphi(A)$ גם מדידה.

טענה: תהי Λ העתקה ליניארית עם $\det\Lambda\neq 0$ אז לכל הקבוצה קומפקטית ומדידה $A\subset\mathbb{R}^n$ מתקיים $\mu(\Lambda(A))=|\det\Lambda|\mu(A)$.

קואורדינטות קטביות: כל נקודה במישור ניתן לתאר באמצעות הצגה הסדורה (ρ,θ) כאשר ρ המרחק בין הראשית והנקודה. ו-θ הזווית בין רדיוס הוקטור וכיוון החיובי של ציר x.

$$x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\theta$$

$$\varphi(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$

$$J\varphi(\rho,\theta)=\rho.$$

קואורדינטות גליליות: של $m\in\mathbb{R}^3$ הן (ρ,θ,z) כאשר (ρ,θ) קואורדינטות קוטביות של ההיטל של M המישור xy

$$x=\rho\cos\theta\quad y=\rho\sin\theta\quad z=z$$

אז $J\varphi=\rho$.

קואורדינטות כדוריות: ב-$\mathbb{R}^3$ קואורדינטות כדוריות הן (ρ,θ,φ) כאשר ρ המרחק בין הנקודה והראשית φ הזווית בין OM וכיוון חיובי של ציר oz ו-θ הזווית בין ההיטל של M על המישור xy וכיוון החיובי של ox.

הקשר בין הקואורדינטות

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$$

$$J=-\rho^2\sin\varphi$$

$0\leq\varphi\leq\pi$

$0\leq\theta\leq 2\pi$