

פתרון אינפי 1 – תרגיל 9

תרגיל 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1} \text{ מצאו את הגבול}$$

פתרון:

ניזכר בזהות הטריגונומטרית $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ לכן

$$1 + \cos(\pi x) = 2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), \text{ מכאן, } \cos(2x) + 1 = 2\cos^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi^2}{4}(1-x)^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi^2}{4} \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x) \cdot \frac{\pi}{2}(1-x)}$$

נעת נבצע החלפת משתנים: $\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2}(1-x) \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right\}$ ונקבל את הגבול:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{4} \frac{2\sin t \sin t}{t \cdot t} = \frac{\pi^2}{2}$$

תרגיל 2:

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$$

פתרון:

$$\text{מתקיים } \frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$$

אם $x > 0$ נכפיל את האי-שוויון ב- x ונקבל: $1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$. לפי משפט

$$\text{הסנדוויץ' נסיק ש- } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

אם $x < 0$ נקבל באופן דומה $1 \geq x \left[\frac{1}{x} \right] > 1 - x$ ושוב $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 1$

$$\text{הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים, ולכן } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

$$\text{ב. } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$$

פתרון:

לכל $x > 1$ מתקיים $0 < \frac{1}{x} < 1$ ומכאן $\left[\frac{1}{x} \right] = 0$. לכן, לכל $x > 1$ מתקיים

$$x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 0 \text{ לכן } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 0$$

$$\text{ג. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{x}$$

פתרון:

הגבול לא קיים. נראה זאת באמצעות גבולות חד צדדיים.

$$\text{במקרה של } x > 0 \text{ נבצע הצבה: } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{ ונקבל:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} y \left[\frac{1}{y} \right] = 0 \text{ (השוויון האחרון נובע מסעיף ב').}$$

מאידך, אם $x < 0$ ושואף לאפס משמאל, בסביבה שמאלית מנוקבת של אפס:

$$(-1, 0) \text{ נקבל: } [x] = -1. \text{ כלומר: } \frac{[x]}{x} = \frac{-1}{x} \text{ וכאשר } x \rightarrow 0^- \text{ מתקיים}$$

$$\frac{-1}{x} \rightarrow \infty$$

תרגיל 3:

$$f(x) = \begin{cases} ax & x \leq 1 \\ x^2 + b & x > 1 \end{cases} \text{ לאילו ערכי } a, b \text{ קיים הגבול בנקודה } x = 1$$

פתרון:

על מנת שיהיה גבול, צריך להתקיים: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. כלומר, $a = 1 + b$.

שאלה 4:

הוכיחו/הפריכו: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ אזי $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(2x) - f(x)] = 0$

פתרון:

הוכחה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ ולכן לכל } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ קיים } m > 0 \text{ כך שלכל } x > m \text{ מתקיים } |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{בוודאי מתקיים } 2x > x > m \text{ ולכן מתקיים } |f(2x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ולכן לכל } x > m \text{ מתקיים}$$

$$|f(2x) - f(x) - 0| = |f(2x) - L + L - f(x)| \leq |f(2x) - L| + |L - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{ובמילים אחרות } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(2x) - f(x)] = 0$$

שאלה 5:

א. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$

פתרון:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot (x+1-x)}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} + (x^2+x)^{\frac{1}{3}}} = \left\{ \text{צמצום ב } x^{\frac{2}{3}} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ב. איך תשתנה תשובתכם אם $x \rightarrow -\infty$?

פתרון:

לא יודעים לגבי תשובתכם, אבל תשובתנו לא תשתנה...

שאלה 6:

הוכיחו כי לא קיימים הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$

פתרון:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \quad \text{מצד שני:}$$

אם $0 < x < \frac{\pi}{2}$ אזי $\cos x$ הוא חיובי ושואף לאפס כאשר $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$

אם $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ אזי $\cos x$ הוא שלילי ושואף לאפס כאשר $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$

לכן, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$. מכאן, הגבול $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ אינו

קיים.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3}{\sin^3 x} \quad \text{ב.}$$

תזכורת: זיכרו שראיתם בהרצאה את האי-שוויון:

$$\text{לכל } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ מתקיים } 0 < \sin x < x, \text{ ולכל } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \text{ מתקיים}$$

$$x < \sin x < 0$$

פתרון:

$$\text{כאשר } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ מתקיים: } \frac{x^2 + x^3}{\sin^3 x} \geq \frac{x^2 + x^3}{x^3} = \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty \text{ נסמן}$$

$$, \frac{x^2 + x^3}{\sin^3 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty \text{ מתקיים, כעת, } f(x) = \frac{x^2 + x^3}{\sin^3 x}, g(x) = \frac{1}{x} + 1$$

מדוע?

הסבר: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$, לכל $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (שימו לב ש-

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty \text{ זאת סביבה מנוקבת ימנית של } 0). \text{ לכן, על פי משפט } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

כלומר, $f(x) \geq g(x)$, לא חייב להתקיים לכל x , אלא מספיק שייתקיים בסביבה הרלוונטית של 0 (אצלנו: סביבה ימנית מנוקבת של 0).

$$\text{כאשר } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \text{ מתקיים: } \frac{x^2 + x^3}{\sin^3 x} \leq \frac{x^2 + x^3}{x^3} = \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$$

$$\text{ולכן } \frac{x^2 + x^3}{\sin^3 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$$

לסיכום, קיבלנו שני גבולות חדד צדדיים שונים ולכן הגבול לא קיים.

$$\lim_{x \rightarrow a} [x] \quad \text{ג. לכל } a \in \mathbb{Z}$$

פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [x] = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} [x] = a - 1$$

שכן, לכל $a < x < a + 1$ מתקיים $[x] = a$, ולכל $a - 1 < x < a$ מתקיים

$$[x] = a - 1. \text{ לכל } a \in \mathbb{Z} \text{ מתקיים } a \neq a - 1 \text{ ולכן הגבולות החדד צדדיים שונים}$$

ולכן הגבול לא קיים.

אתגר מחשבתי

(לא חובה, ולא יהיה בבוחן, אבל נחמד לחשוב על דברים כאלה מדי פעם ☺)

תנו דוגמא לפונקציה חיובית ולא חסומה, המוגדרת בקטע $[0,1]$ שאינה שואפת לאינסוף בשום נקודה.

תשובה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ \frac{1}{x} & \text{אחרת} \end{cases}$$