תרגיל 9- פתרון

.1

א. מנוסחת קושי-הדמר נקבל $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}} = 1$. נציב $x=-1$ ונקבל את הטור

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ שמתכנס אם ורק אם $p>0$. אמנם, אם $p>0$ נקבל שטור זה הינו טור

לייבניץ. אם $p\le 0$ לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות טור כלומר

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\ne 0$ והטור מתבדר. נציב $x=1$ ונקבל את הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ שמתכנס אם

ורק אם $p>1$.

ב. לפי נוסחת דלמבר נקבל: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n!)^2(2n+2)!}{(2n)!\,[(n+1)!]^2}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)2}{n+1} = 4$

.2

א. לפי קושי אדמר $R = \sqrt[n]{n^3 = 1}$ **ועבור** $x=\pm 1$ **נקבל את הטור** $\sum \pm n^3$ **שברור שאינו מתכנס.**

ב. האיבר הכללי הוא: $a_n = \begin{cases} 0 & n\ odd \\ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} & n\ even \end{cases}$ **. לפי קושי אדמר**

$$\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}} = 0 \Rightarrow R=\infty$$

ג. נשים לב ש- $cos(\frac{n\pi}{3}) = 0.5,\ -0.5,\ -1, -0.5, 0.5, 1, 0.5, -0.5, -1...$ **. כלומר,**

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{(0.5)} \le \sqrt[n]{cos(\tfrac{n\pi}{3})} \le \sqrt[n]{1} \to 1 \Rightarrow R=1$$

עבור $x=\pm 1$ **נקבל ש-** $\lim\limits_{n\to\infty} cos(\frac{n\pi}{3}) \ne 0$ **ולכן הטור מתבדר.**

.3

א. נזכר בטור חזקות (טיילור) של e^x **ונקבל:**

$$xe^{-x^3} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{n!}$$

וכיוון שרדיוס התכנסות של הטור של e^x **הוא** ∞ **לכן זהו גם רדיוס ההתכנסות של הטור שלנו.**

ב. נרשום: $ln\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{3}[ln(1+x) - ln(1-x)]$ **וראיתם בהרצאה\ שאלה 7 (בהמשך...) ש-**

$$ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow ln\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{3}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}] = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n]\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ורדיוס התכנסות הוא $|x|<1$

ג. נשים לב ש- $\frac{1}{9+x^2} = \frac{1}{9(1+\frac{x^2}{9})} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{9^{n+1}}$ **ורדיוס התכנסות הוא** $|x|<3$

.4

א. נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}$ בקטע $[1,2]$. הטור מתכנס בקטע $[1,2]$ כי אם $1 \le x \le 2$ אז

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} < \infty.$$

כמו כן טור הנגזרות $\sum_{n=0}^{\infty} -2nxe^{-nx^2}$ מתכנס במידה שווה בקטע $[1,2]$ כי

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} -2nxe^{-nx^2}\right| \le 4\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n} < \infty$$

ולכן ממבחן ה- M הטור מתכנס במידה שווה. לכן ממשפט על גזירה איבר איבר נקבל

$$-\frac{2xe^{-x^2}}{\left(1-e^{-x^2}\right)^2} = \left(\frac{1}{1-e^{-x^2}}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} -2nxe^{-nx^2}$$

ובפרט אם נציב $x=1$ נקבל

$$-\frac{2e^{-1}}{\left(1-e^{-1}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -2ne^{-n}$$

או

$$.\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n} = \frac{e^{-1}}{\left(1-e^{-1}\right)^2}$$

ב. נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n (1+x)^n}{n!}$ כאשר $0 \le x \le 2$. נוכיח שהטור מתכנס אם $0 \le x \le 2$, אכן

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{n!}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}<\infty.$$

כמו כן, טור הנגזרות

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{n!}\right)'\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2x(1-x)^{n-1}(1+x)^{n-1}}{(n-1)!}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot 3^{n-1}}{(n-1)!}<\infty$$

ולכן הטור מתכנס במידה שווה ממבחן ה- M.

כעת נשים לב ש- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{n!}$ שווה ל- e^{1-x^2}. אכן מפיתוח טיילור של e^x נקבל

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ואם נציב במקום x את הביטוי $1-x^2$ נקבל

$$e^{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{n!}.$$

כיוון שניתן לגזור איבר איבר כאשר $0\le x\le 2$ נקבל

$$-2xe^{1-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2x(1-x)^{n-1}(1+x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

אם נציב $x=2$ נקבל ונחלק ב- -4 נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{(n-1)!}=e^{-3}.$$

.5

א. נציג שתי דרכים למציאת הטור המבוקש. דרך ראשונה-

$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)$. לכן, $f(x)=\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}$.

כעת, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ולכן

$$\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}=\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}2^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

כדי לחשב את $f^{(8)}(0)$ נמצא תחילה את המקדם של x^8 שמתקבל מהצבה $n=3$ (כי אז $2n+2=8$). המקדם הוא $\frac{(-1)^3 2^7}{8!}$. מצד שני המקדם אמור להיות $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}$. מיחידות הפיתוח לטור חזקות נקבל ש $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}=\frac{(-1)^3 2^7}{8!}$. לכן, $f^{(8)}(0)=-2^7$. קל לראות ש $f^{(9)}(0)=0$ (למה?).

ב. נשים לב ש $\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$. כמו כן כאשר $|x|<1$ מתקיים $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. לכן ממשפט גזירה איבר איבר נקבל שלכל $|x|<1$ מתקיים $\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$. כדי "להגיע" ל$x^8$ צריך להציב

$n=9$ נקבל שהמקדם של x^8 הוא 9 מצד אחד ו $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}$ מצד שני. לכן, $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}=9$. כלומר, $f^{(8)}(0)=9!$ ובאופן דומה מראים ש $f^{(9)}(0)=10!$.

.6

$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (ניתן להגיע מהטור של סינוס ע"י גזירה איבר איבר או ישירות

דרך חישוב הנגזרות וזיהוי החוקיות). בגלל שהנגזרות האי זוגיות מתאפסות נובע

$\cos(1)=P_{2n+1}(1)+R_{2n+1}(1)$ כאשר פולינום טיילור המתאים הוא

$$P_{2n+1}(1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

ושארית לגרנז' מהצורה $R_{2n+1}(1)=\frac{\cos^{2n+2}(c)\cdot 1^{2n+2}}{(2n+2)!}=\frac{\cos^{2n+2}(c)}{(2n+2)!}$ כאשר c נקודה בין אפס

לאחת. מכיון שכל הגזרות של קוסינוס בערך מוחלט הן רוסינוס או סינוס נקבל

שמתקיים $\left|R_{2n+1}(1)\right|=\left|\frac{\cos^{2n+2}(c)}{(2n+2)!}\right|\le\frac{1}{(2n+2)!}$. אנחנו מעוניינים ש $\frac{1}{(2n+2)!}<10^{-5}$ וזה

שקול לכך ש $(2n+2)!>10^5$. אי שוויון זה מתקיים לראשונה כאשר $n=4$. לכן

$P_{2\cdot4+1}(1)=\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{(2k)!}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}$ כלומר $\cos(1)\approx 0.540302$ (עם שגיאה שקטנה מ

10^{-5}).

.7

א. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}$. $f^{(1)}(c)=\frac{1}{1+c}=\frac{(-1)^{1+1}(1-1)!}{(1+c)^1}$. נניח

נכונות ל n (כלומר שעבור n לכל $-1<c$ מתקיים $f^{(n)}(c)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+c)^n}$) ונוכיח

ל $n+1$. מהנחת האינדוקציה $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ לכל $-1<x$. עם נגזור את

הפונקציה פעם נוספת נקבל ש

$$f^{(n+1)}(x)=\left(\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right)'=(-1)^{n+1}(n-1)!\left(\frac{1}{(1+x)^n}\right)'=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!(-n)}{(1+x)^{n+1}}=\frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+x)^{n+1}}$$

ואם נציב $-1<c$ נקבל ש $f^{(n+1)}(c)=\frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+c)^{n+1}}$ כדרוש.

ב. מכיון ש $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ ומדובר

בטור לייבניץ אז ניתן לפתור גם בלא שימוש בשארית לגרנז'. איך? בטור

לייבניץ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ תמיד מתקיים $|S-S_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right|<a_{n+1}$ (וגם ידוע ש

$a_1>S$).

כעת, אם $\frac{0.5^{n+1}}{n+1}=a_{n+1}<0.01$ אז יתקיים גם $|R_n|=|S-S_n|<0.01$ וזה קורה אפילו

החל מ $n=4$.

.8

$$e^{-2x}\approx 1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2!}=1-2x+2x^2\,.$$

$$\Rightarrow\ 1-2x+2x^2=3x^2$$

$$x^2+2x-1=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\begin{cases}0.414\\-1.41\end{cases}\Leftarrow$$

.9

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

כאשר c בין 0 ל- x.

מכאן, עבור $x=\frac{1}{2}$ נקבל:

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2 2!}+\cdots+\frac{1}{2^n n!}+\frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!}$$

כאשר c בין 0 ל- $\frac{1}{2}$. גודל השגיאה בקרוב הוא אם כן:

$$|R_n|=\left|\frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!}\right|<\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}$$

הדיוק הרצוי הינו 4 ספרות אחרי הנקודה, לכן

$$\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}<0.00005$$

נקבל כי $n=6$ והקרוב הרצוי הינו

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2 2!}+\frac{1}{2^3 3!}+\frac{1}{2^4 4!}+\frac{1}{2^5 5!}+\frac{1}{2^6 6!}=1.6487$$