פיתרון תרגיל 8

2.4 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי עם תת־מרחב U.

א. הוכח שיש העתקה לינארית $T: V \to V$ המקיימת $\ker(T) = U$.

ב. הוכח שיש העתקה לינארית $T: V \to V$ המקיימת $\operatorname{im}(T) = U$.

[רמז: קח בסיס עבור U והרחב אותו לבסיס עבור V. היעזר באשפט ההגדרה של העתקה]

פיתרון:

א.ניקח בסיס $\{u_1, \dots, u_k\}$ ל- U ונרחיב אותו לבסיס לכל המרחב V על ידי הוספת $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$.

נגדיר העתקה לינארית שמעבירה כל איבר מ- U לוקטור האפס של המרחב וכל איבר מההשלמה נעביר לעצמו : $\mathrm{k} + 1 \le \mathrm{j} \le \mathrm{n}$ $u_{\mathrm{j}} \longmapsto \mathrm{u}_{\mathrm{j}}$, . מהו הגרעין של ההעתקה שבנינו ?

נניח כי $T(u) = 0$, כלומר וקטור בגרעין . קיימת לוקטור הזה הצגה כסכום :

$u = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=k+1}^{n} b_i u_i$, אז מהפעלת ההעתקה על שני הצדדים נקבל

$$0 = T(u) = T(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=k+1}^{n} b_i u_i) = (\sum_{i=1}^{k} a_i T u_i) + (\sum_{i=k+1}^{n} b_i T(u_i))$$

$$= \sum_{i=k+1}^{n} b_i u_i$$

וקיבלנו צירוף לינארי מתאפס של $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ הבת"ל – לכן כל מקדמיו אפסים . וקיבלנו : $u = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i$, כלומר הוקטור בגרעין הינו צירוף לינארי של אברים ב- U בלבד .בנוסף – ברור כי איברי U נמצאים בגרעין ומכאן מצאנו את הגרעין !

ב .ניקח בסיס $\{u_1, \dots, u_k\}$ ל- U ונרחיב אותו לבסיס לכל המרחב V על ידי הוספת $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$. נגדיר העתקה לינארית T על ידי ההתאמה : כל איבר ב- U לעצמו , ואת כל איברי ההשלמה נעביר לאפס. נניח כי $u \in Im(T)$

כלומר יש וקטור w , $T(w) = u$. אז כאיבר במרחב יש הצגה לוקטור w זה צירוף מאיברי הבסיס : $w = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=k+1}^{n} b_i u_i$. אבל אז כשנפעיל את ההעתקה על שני הצדדים נקבל :

$u = T(w) = T(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i + \sum_{i=k+1}^{n} b_i u_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \in U$. וברור ש- U מוכל בתמונת ההעתקה כפי שהוגדרה – לכן מהכלה כפולה שווה לתמונת ההעתקה.

2.5 תרגיל. הוכח או הפרך: יהיו $S,T:V\to V$ העתקות לינאריות כך ש $\ker(T)=\ker(S)$ וכן $\mathrm{im}(T)=\mathrm{im}(S)$. אזי $T=S$.

__פיתרון :__

ניקח את $V=\mathbb{R}^2$ ותהא העתקה אחת העתקת הזהות : $T=I_V$ והעתקה שנייה תוגדר על ידי : $Sv=Av$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. לשתיהן גרעין אפס ותמונה שהיא כל המרחב ("על"), אך אינן שוות!

2.7 תרגיל. תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית **אידמפוטנטית** (כלומר $T^2=T$).

א. הוכח או הפרך: $T=I_V$, או $T=-I_V$.

ב. הוכח: $V=\ker(T)\oplus\mathrm{im}(T)$. [רמז: יהי $v\in V$. נניח שהצלחנו למצוא את ההצגה הדרושה $v=u+w$. התבונן ב $T(v),T^2(v)$]

__פיתרון :__

א. העתקת האפס הינה דוגמא להפרכה ובנוסף דוגמא מפריכה נוספת היא ההעתקה המוגדרת על ידי : $T(v)=Av$ באשר $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ המקיימת $A^2=A$.

ב. קיים $v=\underbrace{v-T(v)}_{\in KerT}+\underbrace{T(v)}_{\in ImT}$, לכן יש לנו סכום .נראה שחיתוך המרחבים הוא אפס: $v\in KerT\cap ImT\to Tv=0\ and\ \exists w.Tw=v\ \to$

$$T\big(T(w)\big)=T^2(w)=T(w)=0\to v=T(w)=0$$

ולכן החיתוך הוא אפס והסכום ישר ! .

2.11 תרגיל. תהא $T: V \to V$ העתקה לינארית. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. $\ker(T) \neq \{0\}$.

ב. יש העתקה $O \neq S: V \to V$ עבורה $TS = O$.

[רמז: משפט ההגדרה של העתקה לינארית]

<u>פיתרון:</u>

נניח א' מתקיים.אז קיים וקטור $v_1 \neq 0$ בגרעין ההעתקה. נשלים וקטור זה לבסיס למרחב על ידי הוספת $\{v_2, \ldots, v_n\}$ ונגדיר העתקה לינארית S על סמך משפט ההגדרה , ששולחת את הוקטור הנ"ל לעצמו , ואת שאר איברי הבסיס הנ"ל לאפס. אז עבור וקטור כלשהו w במרחב עם הצגה כצירוף לינארי של איברי הבסיס : $w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ קיים

$TS(w) = T\big(S(w)\big) = T(a_1 v_1) = a_1 T(v_1) = 0$, לכן ההעתקה TS שולחת כל וקטור לאפס , לכן העתקת האפס .

נניח ב' מתקיים.אז קיים וקטור v במרחב כך ש- $S(v) \neq 0$, אך ההרכבה TS היא העתקת האפס , לכן $T\big(S(v)\big) = 0$, ומכאן שגרעין ההעתקה T אינו וקטור האפס בלבד.

2.15 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. נגדיר $T_A: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ על ידי $T_A(X) = AX - XA$ לכל $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

א. הוכח ש T_A העתקה לינארית.

ב. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. מצא את $\ker(T_A)$ ואת $\operatorname{im}(T_A)$, מצא להם בסיס ובדוק שמתקיים: $\nu(T_A) + \operatorname{rank}(T_A) = \dim(\mathbb{R}^{2\times 2})$.

<u>פיתרון :</u>

א'. בדיקה סטנדרטית !

ב' . נמצא צורת מטריצה כללית $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ בגרעין ההעתקה:

קיים (בידקו!) : $T_A(X) = \begin{pmatrix} 2c & (-2a - 2b + 2d) \\ 2c & -2c \end{pmatrix}$.

לכן הגרעין מורכב מהמטריצות המקיימות $\begin{cases} 2c = 0 \\ -2a - 2b + 2d = 0 \end{cases}$

עם פיתרון : $\left\{ \begin{pmatrix} -s + t & s \\ 0 & t \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}$ עם מימד גרעין = 2 .

למציאת תמונת ההעתקה – נמצא לאלו מטריצות $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ קיים פיתרון למשוואה :

$$T_A(X) = \begin{pmatrix} 2x_3 & (-2x_1 - 2x_2 + 2x_4) \\ 2x_3 & -2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

נקבל 4 משוואות במשתנים x_i ונבדוק מתי אין שורת סתירה במשוואות אלו :

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 & a \\ -2 & -2 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 & 0 & d \end{array}\right)$ ונקבל שתנאי לאי קיום שורת סתירה הוא :

$\begin{cases} a = c \\ a = -d \end{cases}$ ונקבל מטריצות בתמונה מהצורה : $\left\{ \begin{pmatrix} -t & s \\ -t & t \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\}$, והתמונה ממימד 2 , ווידאנו את קיום משפט הדרגות ! .

2.19 תרגיל[1]. הוכח את **משפט הדרגה ההפוך**: יהא V מרחב וקטורי ממימד n.

א. יהיו U,W תת-מרחבים של V, כך שמתקיים $\dim(U)+\dim(W)=n$. הוכח שקיימת העתקה לינארית $T:V\to V$ כך ש $\mathrm{im}(T)=U$, וכן $\ker(T)=W$. [ראה: קח בסיס עבור U והשלם אותו לבסיס עבור V. הגדר את ההעתקה על בסיס זה]

<u>פיתרון :</u>

ניקח בסיס $\{w_1,\dots,w_k\}$ ל- W. ונשלימו לבסיס לכל המרחב בהוספת הוקטורים : $\{w_{k+1},\dots,w_n\}$. לפי הנתון מספר האיברים שהוספנו שווה למימד תת המרחב U. ל- U נבחר בסיס : $\{u_{k+1},\dots,u_n\}$. כעת נגדיר העתקה T בעזרת משפט ההגדרה על ידי : $\begin{cases} 1 \le j \le k \,, w_j \longmapsto 0 \\ k+1 \le j \le n \,, w_j \longmapsto u_j \end{cases}$

אז , אם איבר נמצא בגרעין : $T(v)=0$ אז מכיוון שיש ל- v הצגה כצירוף איברי בסיס : $v=\sum_{i=1}^{n} a_i w_i$, אז נקבל אחרי שנפעיל את ההעתקה כי :

$0=T(v)=T(\sum_{i=1}^{n} a_i w_i)=\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i$, ולכן צירוף לינארי של איברי בסיס U , ולכן כל מקדמיו אפסים וקיבלנו כי $v=\sum_{i=1}^{k} a_i w_i$, כלומר הוקטור שלנו שייך ל- W. כלומר הגרעין מוכל ב- W , אך ברור גם ש W מוכל בגרעין ,

ולכן ממש שווה לגרעין מהכלה כפולה . בדומה נראה כי אם איבר נמצא בתמונה , $u = T(v)$ אז מכיוון שיש הצגה של $v = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$ נקבל כי מהגדרת ההעתקה שלנו : $u = T(v) = \sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i \in U$, כלומר $ImT \subseteq U$

אך ברור שגם ההכלה ההפוכה מתקיימת מהגדרת ההעתקה , ולכן שיוויון , כנדרש!.