

תרגיל לעבודה עצמית מספר 2

שאלה 1

עבור כל אחד מהפונקציות הנתונות בתחום הנתון בדוק באם הפונקציה עולה ממש/יורדת ממש/לא עולה ולא יורדת. (ללא שימוש בנגזרת)

א. $f(x) = \cos x$ בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ב. $f(x) = \cos x$ בתחום $[0, \pi]$.

ג. $f(x) = e^{\cos x}$ בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ד. $f(x) = \frac{1}{x}$ בתחום $(0, \infty)$.

ה. $f(x) = \frac{1}{x}$ בתחום $(-\infty, 0)$.

פתרון שאלה 1

א. נניח ש $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ונוכיח ש $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

נשתמש בזהות $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.

$f(x_2) - f(x_1) = \cos x_2 - \cos x_1 = -2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_2 - x_1}{2}$

מכיוון ש $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ נקבל ש $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{4}$ ולכן $\cos \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$.

מכיוון ש $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ נקבל ש $0 < \frac{x_2 + x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ ולכן $\cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$.

סה"כ נקבל $-2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_2 - x_1}{2} < 0$ ולכן הפונקציה מונוטונית יורדת ממש.

ב. הפונקציה יורדת. הוכח דומה לסעיף א.

ג. ראינו בסעיף קודם שהפונקציה $\cos x$ עולה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, בנוסף הפונקציה e^x עולה. ראינו בשיעור

שאם הפונקציות f, g עולות ממש ב \mathbb{R} אז הפונקציה $f \circ g$ גם עולה ממש.

ד. נניח ש $0 < x_1 < x_2$ ואז נקבל ש $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$ ז"א הפונקציה יורדת ממש.

ה. נניח ש $x_1 < x_2 < 0$ ואז נקבל ש $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$ ז"א הפונקציה יורדת ממש.

שאלה 2

גזור את הפונקציות הבאות:

א. $\sin(3x^2 + 2)$. ב. $(x^7 - 3x^6 - x^3)^5$. ג. $\frac{1}{x^7(1+x)^7}$. ד. $\frac{\sin x}{x}$.

ה. $\frac{x}{1 + \ln x}$. ו. $e^{\ln(x^2+1)+x}$. ז. $\arcsin(\cos x)$. ח. $\arctan(e^{2x})$.

ט. $\tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x^{\sin x}$, $\log_{\sin x} x$.א

פתרון

א. $(\sin(3x^2 + 2))' = 6x \cos(3x^2 + 2)$.א

ב. $\left((x^7 - 3x^6 - x^3)^5\right)' = 5(x^7 - 3x^6 - x^3)^4 \cdot (7x^6 - 18x^5 - 3x^2)$.ב

$\frac{1}{x^7(1+x)^7} = (x+x^2)^{-7}$

ג. $\left((x+x^2)^{-7}\right)' = -7(x+x^2)^{-8}(1+2x) = \frac{-7-14x}{(x+x^2)^8}$.ג

ד. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.ד

ה. $\left(\frac{x}{1+\ln x}\right)' = \frac{1+\ln x - \frac{1}{x} \cdot x}{(1+\ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$.ה

ו. $\left(e^{\ln(x^2+1)+x}\right)' = \left(\frac{2x}{x^2+1} + 1\right) e^{\ln(x^2+1)+x}$.ו

ז. $\text{arc}(\sin(\cos x)) = \text{arc}\left(\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow (\text{arc}(\sin(\cos x)))' = -1$.ז

ח. $(\arctan(e^{2x}))' = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$.ח

ט. $\left(\tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{2}{(1-x)^2 \cos^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$.ט

י. $x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x} \Rightarrow (x^{\sin x})' = \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) e^{\sin x \ln x}$.י

שאלה 3

מצא את הנגזרת של הפונקציה
 $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ בכל נקודה.

פתרון

עבור $x \neq 0$ נקבל $f'(x) = 2 \sin x \cos x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin^2 x \cos \frac{1}{x}$

עבור $x = 0$ נשתמש בהגדרת הנגזרת

$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \sin h \cdot \sin \frac{1}{h} = 0$

השוויון האחרון נובע מכיוון ש $\sin \frac{1}{h}$ פונקציה חסומה.

שאלה 4

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x > 1 \\ x^2 & x \leq 1 \end{cases} \text{ נגדיר פונקציה}$$

מה צריכים להיות a ו b כדי ש f תהייה גזירה בכל נקודה ב \mathbb{R} ? נמק את תשובתך!

פתרון

נשים לב ש $f'_-(1) = 2$, $f'_+(1) = a$ ז"א $a = 2$ כדי שהפונקציה תהייה גזירה היא חייבת להיות רציפה ולכן $2 \cdot 1 + b = 1^2 \Rightarrow b = -1$.

שאלה 5

כמה פתרונות יש למשוואה $x \sin x + \cos x = x^2$ בקטע $[0, \infty)$.

פתרון

יש לבדוק כמה פתרונות יש למשוואה $x \sin x + \cos x - x^2 = 0$ בקטע $[0, \infty)$.

$$f(x) = x \sin x + \cos x - x^2$$

$$f'(x) = x \sin x + \cos x - x^2 = \sin x + x \cos x - \sin x - 2x = x \cos x - 2x = x(\cos x - 2)$$

מכיוון שפונקציה הנגזרת מתאפסת רק בנקודה $x = 0$ נקבל ממשפט רול שיש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $f(x) = x \sin x + \cos x - x^2$ בקטע $[0, \infty)$.

$$f(0) = 1, f(10) = 10 \cdot \sin 10 + \cos 10 - 100 < -81, \text{ וזאת מכיוון ש } |\sin x| < 1, |\cos x| < 1$$

לפי משפט ערך הביניים נקבל שיש לפחות פתרון אחד בקטע $[0, 10]$ ואז יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0, \infty)$.

סה"כ קיבלנו שיש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד בקטע $[0, \infty)$ ז"א יש בדיוק פתרון אחד בקטע

$$[0, \infty)$$

שאלה 6

מצא את הנקודה/נקודות c ממשפט לגרנז' עבור:

$$\text{א. } f(x) = x^2 \text{ ב } [0, 3] \text{ ב. } f(x) = \frac{1}{x} \text{ ב } [1, 2] \text{ ג. } f(x) = x^3 \text{ ב } [-1, 1]$$

$$\text{ד. } f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \text{ ב } [-3, 3]$$

ה. הראה של $f(x) = \frac{1}{x}$ אין נקודות לגרנז' c בכל $[a, b]$ כך ש $a < 0 < b$. מדוע?

פתרון

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

א. $f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{9}{3} = 3$ בנוסף $f'(x) = 2x$ סה"כ קיבלנו $f'(c) = 2c \Leftrightarrow 2c = 3$
 $c = 1.5$

ב. $f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2^{-1}}{1} = -\frac{1}{2}$ בנוסף $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ סה"כ קיבלנו $f'(c) = -\frac{1}{c^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2}$
 $c = \sqrt{2}$

ג. $f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = 1$ בנוסף $f'(x) = 3x^2$ סה"כ קיבלנו $f'(c) = 3c^2 \Leftrightarrow 3c^2 = 1$
 $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ד. $f'(c) = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{a - b}{ab(b - a)} = -\frac{1}{ab}$ מכיוון ש $a < 0 < b$ נקבל ש $-\frac{1}{ab} > 0$ ואילו

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

ייתכן מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x = 0$.