1. הגדרה: יהיו $(Y,\tau')\,,(X,\tau)$ מ״ט ו $f:X\to Y$. נאמר ש f רציפה ב $x\in X$ אם לכל סביבה פתוחה V של $f(x)$ קיימת סביבה פתוחה U של x כך ש $U\subseteq f^{-1}(V)$.

   (א) פונקציה $f:X\to Y$ תקרא רציפה אם היא רציפה בכל $x\in X$. זה שקול לכך ש: תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה . כלומר, לכל $O\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(O)\subseteq X$ פתוחה. (כמובן בטופולוגיות המתאימות).

   (ב) שקול: $f:X\to Y$ רציפה אם התמונה ההפוכה של כל קבוצה סגורה בY, היא קבוצה סגורה בX.

2. תרגיל: נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{R}$ באופן הבא: $\tau=\{\mathbb{R},\emptyset,\{2\}\}$. $f:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\tau)$ מוגדרת ע״י $f(x)=2x$. מצאו את כל הנקודות שבהן f רציפה.
   פתרון: לכל $x\neq 1$ מתקיים $f(x)\neq 2$, ולכן הסביבה היחידה של $f(x)$ היא כל המרחב. ואכן $\mathbb{R}$ הוא סביבה פתוחה של x, והתמונה שלו מוכלת בתוך $\mathbb{R}$.
   ב$x=1$ אין רציפות. כי $f(x)=2$. נבחר את $\{2\}$ זאת סביבה פתוחה של $f(x)$. האם יש ל1 איזשהי סביבה פתוחה שהתמונה שלה מוכלת ב$\{2\}$?- לא. כי הסביבה היחידה של 1 היא $\mathbb{R}$, ו$f[\mathbb{R}]=\mathbb{R}$.

3. מסקנה: סכום של פונקציות רציפות הוא לא בהכרח רציף. ניקח $f(x)=x$ מאותם מרחבים. זאת פונקציית הזהות ממרחב לעצמו ולכן היא רציפה. אבל $f(x)+f(x)=2x$ שאינה רציפה.

4. תרגיל: פונקציה רציפה שומרת על התכנסות. כלומר, אם $f:X\to Y$ רציפה, ו$x_n\to x$ אז $f(x_n)\to f(x)$.
   פתרון: תהי V סביבה פתוחה של $f(x)$. אנחנו צריכים להראות שהחל ממקום מסויים, כל איברי הסדרה $f(x_n)$ יהיו בV.
   כעת נשתמש בהגדרה של רציפות. $f^{-1}(V)$ היא קבוצה פתוחה שמכילה את x. אז מהגדרת התכנסות, יש איזשהו N כך שלכל $n>N$ מתקיים $x_n\in f^{-1}(V)$. וזה אומר ש$f(x_n)\in V$.

5. תרגיל: פונקציה שומרת על התכנסות היא לא בהכרח רציפה.
   פתרון: $f:(\mathbb{R}\cup\{p\},\tau)\to(\mathbb{R}\cup\{p\},\tau_{disc})$ (תזכורת: $\tau=\{O:p\notin O\}\cup\{O:p\in O\wedge|O^c|\leq\aleph_0\}$)
   $f=Id$.
   בתרגול הקודם הוכחנו שבטופולגיה τ כל סדרה מתכנסת היא קבועה לבסוף. בטופולוגיה הדיסקרטית כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף. אז נניח ש$x_n\to x$. זה אומר שx_n קבוע לבסוף על x. ואז $f(x_n)$ קבוע לבסוף על $f(x)$. ולכן $f(x_n)\to f(x)$.
   f לא רציפה, כי למשל $\{p\}$ היא קבוצה פתוחה בטופולוגיה הדיסקרטית. $f^{-1}\{p\}=\{p\}$ היא לא קבוצה פתוחה בτ.

תתי מרחבים

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו$Y\subseteq X$. אנחנו רוצים להגדיר טופולוגיה על Y, ככה שפונקציית ההכלה $i:Y\to X$ תהיה רציפה. בשביל זה צריך להתקיים שלכל U פתוחה בX, $i^{-1}(U)$ פתוחה בY. $i^{-1}(U)=U\cap Y$.

לכן אנחנו מגדירים את ״טופולוגיית תת המרחב על Y״ להיות כל הקבוצות מהצורה $Y\cap U$ כאשר U קבוצה פתוחה בX.

למשל: $Y = [0,1]$ בתור תת מרחב של $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה האוקלידית, הקבוצות הבאות יהיו פתוחות: $[0,1]$, $(0.5,1]$, $(0.5,0.6)$.

תרגיל: $Y \subseteq X$, קבוצה A היא סגורה בY אמ"ם היא שווה לY חיתוך עם איזשהי קבוצה סגורה מX.

הוכחה: תהי A סגורה בY. כלומר, $Y \setminus A$ פתוחה בY. לפי הגדרת טופולוגיית תת המרחב $Y \setminus A = Y \cap U$ כאשר U פתוחה בX. אז $A = Y \cap U^c$. וU^c היא סגורה בX, כי היא משלים של קבוצה פתוחה בX.

כיוון השני: תהי C קבוצה סגורה בX. צריך להוכיח ש$C \cap Y$ סגורה בY. אבל $C \cap Y = i^{-1}(C)$. וראינו שפונקציית ההכלה רציפה (לפי זה הגדרנו את הטופולוגיה), אז המקור של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה.

בצורה ישירה: $Y \setminus (Y \cap C) = Y \cap C^c$. כלומר, החיתוך של Y עם איזשהי קבוצה פתוחה בX. לכן פתוח בY.

1. יהיו X וY מרחבים טופולוגיים, ו$\{O_i\}$ כיסוי פתוח של X. כלומר, הקבוצות O_i פתוחות, ו$X = \bigcup O_i$. נניח שיש פונקציות רציפות $f_i : O_i \to Y$ שמתלכדות על החיתוכים. כלומר, לכל i, j,

$$f_i|_{O_i \cap O_j} = f_j|_{O_i \cap O_j}$$

אז הן מגדירות פונקציה $f : X \to Y$ בדרך אחת. כלומר, לכל $x \in X$, קיים O_i כך ש$x \in O_i$. נגדיר $f(x) = f_i(x)$. נשים לב שזה מוגדר היטב. כלומר, אם בנוסף $x \in O_j$ אחר, אז $f_i(x) = f_j(x)$.

הוכיחו שאם לכל i, f_i רציפה, אז f רציפה.

הוכחה: תהי V פתוחה בY. $f^{-1}(V) = \bigcup f_i^{-1}(V)$. f_i רציפות, אז $f_i^{-1}(V)$ פתוחות בO_i.

קבוצה פתוחה בO_i היא חיתוך של O_i עם איזשהי קבוצה פתוחה בX. נתון שלכל i O_i פתוחות בX, וידוע שחיתוך של מספר סופי של קבוצות פתוחות בX הוא קבוצה פתוחה בX, לכן לכל i, $f_i^{-1}(V)$ פתוחה בX.

לסיום, איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה. לכן $f^{-1}(V)$ פתוח.

2. שימו לב שהוכחנו תוך כדי טענה חשובה: אם Y פתוח בX, אז כל קבוצה שפתוחה בY פתוחה גם בX.

3. יהיו X וY מרחבים טופולוגיים, ו$\{C_i\}$ כיסוי סופי סגור של X. כלומר, הקבוצות C_i סגורות, ו$X = \bigcup C_i$. נניח שיש פונקציות רציפות $f_i : C_i \to Y$ שמתלכדות על החיתוכים. כלומר, לכל i, j,

$$f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}$$

אז הן מגדירות פונקציה $f : X \to Y$ בדרך אחת. כלומר, לכל $x \in X$, קיים C_i כך ש$x \in C_i$. נגדיר $f(x) = f_i(x)$. נשים לב שזה מוגדר היטב. כלומר, אם בנוסף $x \in C_j$ אחר, אז $f_i(x) = f_j(x)$.

הוכיחו שאם לכל i, f_i רציפה, אז f רציפה.

הוכחה: במקרה הזה יותר נח להוכיח שתמונה הפוכה של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה. תהי A סגורה בY. $f^{-1}(A) = \bigcup f_i^{-1}(A)$. f_i רציפות, אז $f_i^{-1}(A)$ סגורות בתוך בC_i. קבוצה סגורה בC_i שווה לC_i חיתוך עם איזשהי קבוצה סגורה בX. אבל C_i סגורות, וחיתוך של קבוצות סגורות בX הוא סגור בX. לכן $f_i^{-1}(A)$ סגורה בX. ואיחוד סופי של קבוצות סגורות בX היא קבוצה סגורה בX.

פנים וסגור

1. הגדרה: יהי (X,τ) מ״ט ו$A \subseteq X$ תת קבוצה. הסגור של A מסומן $cl(A) = \bar{A} = \cap_{A\subseteq S} S$ הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A. הפנים של A מסומן $int(A) = \mathring{A} = \cup_{O\subseteq A} O$ הקבוצה הפתוחה המקס' שמוכלת ב A.
לדוגמא: $[0,1)$ בטופולוגיה האוקלידית. $int = (0,1), cl = [0,1]$.

2. בטופולוגיה הקוסופית (קבוצה היא פתוחה אמ"ם המשלים שלה הוא סופי) הוכיחו שקבוצה שהפנים שלה לא ריק, היא פתוחה.
הוכחה: תהי A קבוצה עם פנים לא ריק. כלומר, קיימת איזשהי קבוצה פתוחה לא ריקה $O \subseteq A$. זה אומר שO^c הוא סופי. $A^c \subseteq O^c$, לכן A^c סופי, ולכן A פתוחה.

3. הוכיחו/הפריכו: $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$.
טענת עזר: אם $A_1 \subseteq A_2$ אז $cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$ ו$int(A_1) \subseteq int(A_2)$.
$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$: $A, B \subseteq A \cup B$. לכן $\bar{A}, \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. ואז $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$
$\bar{A} \cup \bar{B} \supseteq \overline{A \cup B}$: $\bar{A} \cup \bar{B}$ זאת קבוצה סגורה כאיחוד סופי של קבוצות סגורות. והוא מכיל את A וB. אז הוא מכיל את $A \cup B$. מהגדרה, $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

4. הוכיחו/הפריכו: $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B}$
$\bar{A} \cap \bar{B} \supseteq \overline{A \cap B}$. $A \cap B \subseteq A, B$ ולכן $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A}, \bar{B}$. ולכן $\bar{A} \cap \bar{B} \supseteq \overline{A \cap B}$.
הפרכה: $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. מצד אחד, $A \cap B = \emptyset$ ולכן $\overline{A \cap B} = \emptyset$. מצד שני, $\bar{A}, \bar{B} = \mathbb{R}$. $\bar{A} \cap \bar{B} = \mathbb{R}$.

5. משפט: $p \in \bar{A}$ אמ״מ לכל סביבה פתוחה $p \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

6. משפט: $p \in int(A)$ אמ"ם קיימת O פתוחה $p \in O \subseteq A$.

7. משפט: $cl(A)^c = int(A^c)$ (בהרצאה)
הוכחה: $p \in int(A^c)$ אמ"ם קיימת O פתוחה $p \in O \subseteq A^c$. אמ"ם קיימת קבוצה O כך ש$p \in O \wedge O \cap A = \emptyset$. אמ"ם $p \notin cl(A)$. אמ"ם $p \in cl(A)^c$.

8. הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי. קבוצה A נקראת "צפופה" אם $cl(A) = X$. למשל, $\mathbb{Q}$ צפופה ב$\mathbb{R}$.
קריטריון שקול: A צפופה אם לכל קבוצה פתוחה O בX, $A \cap O \neq \emptyset$.

9. דוגמא: בטופולוגיה הקוסופית על מרחב אינסופי קבוצה היא צפופה אמ"ם היא אינסופית.
הסבר: קבוצה סופית היא סגורה (לפי הגדרה) אז הסגור שלה זה היא בעצמה. לכן לא צפופה.
קבוצה אינסופית- הקבוצה הסגורה היחידה שמכילה אותה היא כל המרחב, (כי הקבוצות הסגורות הן או קבוצות סופיות או כל המרחב), אז הסגור שלה הוא כל המרחב.

10. הגדרה: מרחב נקרא ספרבילי אם יש לו תת קבוצה צפופה בת מניה.
למשל: $\mathbb{R}$ ספרבילי בגלל $\mathbb{Q}$.
כל מרחב קוסופי הוא ספרבילי.

11. דוגמא נגדית: יהי X מרחב שאינו בן מניה, ונגדיר עליו את הטופולוגיה הקומנייתית. כלומר, O פתוחה אמ"ם O^c היא בת מניה (או ש$O = \emptyset$). אז כל קבוצה בת מניה היא סגורה, ולכן הסגור של עצמה, וזה לא שווה לכל המרחב.

12. הגדרה: $scl(A)$ זה פשוט האוסף של כל הגבולות של סדרות מA.

13. כעת ניתן הוכחה נוספת לכך ש$\mathbb{R} \cup \{p\}$ אינו מטריזבילי. ניתן דוגמא לקבוצה שהזגור שלה שונה מהסגור הסדרתי. ניקח $A = \mathbb{R}$.
$scl(A) = A$, כי ראינו שסדרות מתכנסות הן תמיד קבועות לבסוף.
$cl(A) = \mathbb{R} \cup \{p\}$, כי הקבוצות היחידות שמכילות את A הן $\mathbb{R}$ ו$\mathbb{R} \cup \{p\}$, אבל $\mathbb{R}$ לא סגור, כי המשלים שלו לא פתוח.