הוכחת הנוסחאון במתמטיקה ל5 יח"ל

חלק א' - אלגברה

טומי זאפט

במסמך זה אעבור על החלק הראשון בנוסחאון ("דף הנוסחאות") של תלמידי 5 יח"ל במתמטיקה בתיכון. נוכיח את הנוסחאות ונסבירן באופן אינטואיטיבי ומובן.

אעבור על החלק הראשון ("אלגברה") בדף הנוסחאות המלא המעודכן לשנת תשפ"א 2020-2021 של תלמידי 5 יחידות לימוד במתמטיקה.

אלגברה

הזהויות הראשונות שמופיעות בדף הנוסחאות הן הזהויות הבאות:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

כאן הדרך להראות את נכונות הזהויות היא פשוט פתיחת סוגריים ופישוט האיברים.

הנה דוגמא להוכחת הנכונות של הזהות הבאה:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^2$$

<u>דרך ההוכחה:</u>

נפשט את הביטוי משמאל עם פתיחת סוגריים ונראה כי אנו מגיעים לביטוי שכתוב מצד ימין.

$$(a \pm b)^3 = (a \pm b) \cdot (a \pm b) \cdot (a \pm b) = (a \pm b) \cdot (a^2 \pm ab \pm ab + b^2) =$$
$$= (a \pm b) \cdot (a^2 \pm 2ab + b^2) = a^3 \pm 2a^2b + ab^2 \pm a^2b + 2ab^2 \pm b^3 =$$
$$= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

הגענו לשוויון שרצינו! כל זה רק עם פתיחת סוגריים סטנדרטית וכפל פשוט.

חשוב לשים לב שבמהלך הפישוט השתמשנו בעובדה ש:

$$\pm b \cdot \pm b = b^2$$

זה קורה כיוון שזהו אותו הסימן בשתי הגורמים. אם נבחר את הסימן בהתחלה להיות + אז ברור ש: $+b \cdot +b = b \cdot b = b^2$. ואם נבחר את הסימן לפני b בהתחלה להיות – אז נקבל את אותה התוצאה כי מינוס כפול מינוס = פלוס. נקבל:

$$-b \cdot -b = b^2$$

■

משוואה ריבועית:

מציאת שורשים של משוואה ריבועית:

$$(a \neq 0) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

אזי שורשי המשוואה הם:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

הסבר קצר:

לפני שנוכיח, צריך קצת הסבר על מה זה בכלל שורש של פונקציה/משוואה.

מויקיפדיה: "שורש של משוואה הוא איבר בתחום ההגדרה שעבורו ערך הפונקציה הוא 0"

כלומר אם יש לנו פונקציה $f(x)$, ואומרים על a שהוא שורש של הפונקציה, אזי אנחנו מבינים כי $f(a) = 0$.

אז מה הבעיה למצוא את שורשי המשוואה הריבועית? יש לנו בעיה שx מופיע פעמיים ולכן קשה לנו "לבודד" את x בצד אחד של המשוואה כמו שאנחנו רגילים ולמצוא פתרון.

בכל זאת קיימת דרך "לבודד" את x בצד אחד של המשוואה ולמצוא פתרון.

אנחנו נשתמש בדרך שנקראת *השלמה לריבוע*. ואפשר להבין משמה מה נעשה, נשלים לריבוע, כלומר לביטוי מהצורה $(y+z)^2$ (כאן y, z הם סתם אותיות חסרות משמעות אז לא להיבהל :)

דרך ההוכחה:

אז הנה הדרך לעשות זאת, נתחיל מהמשוואה שנתונה לנו:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

כעת נחלק את הביטוי בa. מותר לנו לעשות את זה כי אנחנו יודעים (נתון לנו) שa שונה מ0.

אחרי החילוק בa נקבל:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

נוסיף ל2 האגפים $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ + ונעביר את $\frac{c}{a}$ אגף.

נקבל:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

בצד שמאל ניזכר בזהות של הריבוע שאומרת:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

נשיב לב שזה המקרה בצד שמאל של המשוואה. כלומר ש:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

נציב את הביטוי בצד שמאל. בצד ימין נוכל לפתוח סוגריים ונקבל:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

ביצענו השלמה לריבוע, מכאן נשארה ממש קצת עבודה! נבצע מכנה משותף בצד ימין על מנת לפשט את הביטוי.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

הביטוי במונה נראה לנו כבר מוכר מהנוסחה שלנו.

כעת נבצע שורש על שני אגפי המשוואה וכמעט סיימנו.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}}$$

נוכל להוציא את המכנה מחוץ לשורש ולהעביר את $\frac{b}{2a}$ אגף:

$$x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

כעת נשאר רק לחבר את השברים ונקבל את הנוסחה שרצינו:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■

כך אפשר להבין למה הנוסחה של שורשי המשוואה הריבועית נראית כך.

ממבט ראשון היא נראית מפחידה ומאיימת אבל עכשיו הבנו אותה לעומק ואולי אחרי הכול היא לא כל כך מפחידה :)

סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה:	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$
איבר ה־n:	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום:	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ סכום אין־סופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

סדרה חשבונית:

אין הרבה לפרט על כלל הנסיגה, הוא פשוט מגדיר לנו מה היא סדרה חשבונית. סדרה שבה האיבר הראשון הוא פרמטר כלשהו a. וכל איבר מוגדר להיות האיבר שלפניו ועוד d כלשהו, הפרש הסדרה.

כמה סדרות לדוגמא:

$$2,5,8,11,14,\cdots \leftrightarrow a_1 = 2, d = 3$$
$$69,61,53,45,37,\cdots \leftrightarrow a_1 = 69, d = -8$$

כעת נוכיח את **הנוסחה לאיבר ה-n-י:** $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

נוכיח זאת באינדוקציה מתמטית. קודם נראה כי הנוסחה מתאימה לa_1, כלומר עבור $n = 1$.

ואז נניח באינדוקציה כי הנוסחה מתקיימת עבור האיבר הa_n ונראה כי הנוסחה נכונה עבור a_{n+1}.

עבור a_1 נציב $n = 1$ בנוסחה ונראה כי היא אכן נכונה:

$$a_1 = a_1 + (1-1) \cdot d = a_1 + 0 \cdot d$$
$$a_1 = a_1$$

קיבלנו פסוק אמת.

כעת להנחת האינדוקציה, נניח כי הנוסחה מתקיימת עבור a_n.

כלומר שמתקיים $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

לפי איך שהגדרנו את הסדרה, מתקיים כי: $a_{n+1} = a_n + d$

לכן נציב ונקבל:

$$a_{n+1} = a_1 + (n-1)\cdot d + d = a_1 + (n-1+1)\cdot d$$
$$a_{n+1} = a_1 + n\cdot d$$

אכן לפי הנוסחה. לכן הוכחנו את נכונותה של הנוסחה עבור האיבר ה-n-י.

■

כעת נוכיח את הנוסחה עבור **סכום סדרה חשבונית**:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$$

אראה דרך הוכחה פשוטה ונוחה לנוסחה. כמובן שישנן דרכים אחרות, ביניהן דרך אינדוקציה כפי שהוכחנו קודם. אבל בחרתי בדרך זו כי היא מאוד פשוטה ואלגנטית.

אז הנה ההוכחה:

נסתכל על הסכום S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

כעת נסתכל על סכום זה בשתי דרכים שונות. ראשית נביע את איברי הסדרה בעזרת האיבר הראשון:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$

כעת נסתכל על אותו הסכום, רק שנביע את איברי הסדרה בעזרת האיבר האחרון שאותו אנו סוכמים - a_n:

$$S_n = (a_n - (n-1)d) + (a_n - (n-2)d) + \cdots + (a_n - d) + a_n$$

כעת נסתכל על חיבור שתי המשוואות. נקבל:

$$\begin{aligned} 2\cdot S_n = {} & a_1 + (a_1 + \cancel{d}) + \cdots + (a_1 + \cancel{(n-2)d}) + (a_1 + \cancel{(n-1)d}) \\ & + (a_n - \cancel{(n-1)d}) + (a_n - \cancel{(n-2)d}) + \cdots + (a_n - \cancel{d}) + a_n \end{aligned}$$

ונשים לב שדברים מצטמצמים כאן.

וסה"כ נקבל בצד ימין של המשוואה חיבור n פעמים של a_1 ועוד חיבור n פעמים של a_n

כלומר קיבלנו:

$$2\cdot S_n = n\cdot a_1 + n\cdot a_n = n\cdot(a_1 + a_n)$$

נשאר רק לחלק ב2 ונקבל:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$$

ובזה סיימנו! מצאנו את הנוסחה לסכום של סדרה חשבונית.

■

סדרה הנדסית:

שוב, אין הרבה לפרט על כלל הנסיגה, הוא מגדיר לנו מה היא סדרה הנדסית. האיבר הראשון הוא פרמטר a. וכל איבר מוגדר להיות האיבר שלפניו כפול המנה q.

כמה סדרות לדוגמא:

$$1,7,49,343,\cdots \leftrightarrow a_1 = 1, q = 7$$
$$9,-3,1,-\frac{1}{3},\frac{1}{9},\cdots \leftrightarrow a_1 = 9, q = -\frac{1}{3}$$

כעת נוכיח באינדוקציה את **הנוסחה לאיבר ה-n-י**: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

נבדוק את הנוסחה עבור האיבר הראשון a_1. נציב $n = 1$

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1 \cdot 1$$

אכן קיבלנו פסוק אמת. כעת באינדוקציה נניח כי הנוסחה נכונה עבור a_n ונוכיח כי היא נכונה עבור a_{n+1}.

כלומר לפי הנחת האינדוקציה:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

נסתכל על האיבר a_{n+1}. לפי הגדרת סדרה הנדסית, מתקיים כי:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

לכן אם נציב את הנחת האינדוקציה נקבל:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n$$

וקיבלנו את מה שרצינו.

■

הגענו לנוסחה **לסכום סדרה הנדסית סופית**:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

* חשוב לשים לב שנוסחת הסכום מוגדרת עבור $q \neq 1$.

אם $q = 1$ אז אנחנו מקבלים סדרה קבועה $a_1, a_1, a_1, \cdots$ וסכום n האיברים הראשונים הוא פשוט: $n \cdot a_1$

לכן נניח ש $q \neq 1$.

כעת אראה דרך הוכחה מאוד פשוטה לנוסחה כמובן שישנן דרכים אחרות, ביניהן דרך אינדוקציה כפי שהוכחנו קודם. אבל בחרתי בדרך זו כי היא מאוד פשוטה ואלגנטית.

אז הנה ההוכחה:

נסתכל על הסכום S_n

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$
$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 \cdots + a_1q^{n-1}$$

נוכל להוציא את a_1 מחוץ לסוגריים ונקבל:

$$S_n = a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

כעת "נייצר" עוד משוואה, בכך שנכפיל את המשוואה שלנו בq.

קיבלנו משוואה נוספת:

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot (q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n-1} + q^n)$$

עכשיו נבצע חיסור בין 2 המשוואות:

$$q \cdot S_n - S_n =$$
$$a_1 \cdot (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n) - a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1})$$
$$= a_1(\cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cdots + \cancel{q^{n-1}} + q^n - (1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cdots + \cancel{q^{n-2}} + \cancel{q^{n-1}}))$$

ונשים לב שדברים מצטמצמים לנו.

וסה"כ קיבלנו:

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot (q^n - 1)$$
$$(q - 1) \cdot S_n = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

נראה מוכר? נשאר לנו רק לחלק ב$(q - 1)$ ונקבל את הנוסחה.

(לכן חשוב ש $q \neq 1$ אחרת נבצע חילוק ב0, מה שאסור)

וקיבלנו:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

ובזה סיימנו את ההוכחה. מצאנו את הנוסחה לסכום סופי של סדרה הנדסית.

■

כעת נוכיח באינדוקציה את הנוסחה **לסכום סדרה הנדסית אין-סופית**:

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{1000000} + \cdots = \frac{a_1}{1 - q}$$

הנוסחה מדברת על סכום סדרה אינסופית כאשר $-1 < q < 1$.

זה התחום של מנת הסדרה q שבו הסכום האינסופי מתכנס למספר ממשי. (למעט המקרה בו $a_1 = 0$).

ההוכחה עצמה לא קשה להבנה ואסביר אותה בצורה אינטואיטיבית. הפרטים הטכניים אולי נראים אינטואיטיביים עדיין דורשים הוכחה. אדלג על הוכחתם כי דרוש ידע בחשבון אינפיניטסימלי.

בהוכחה נשתמש בנוסחה לסכום עד האיבר הn של הסדרה.

בעצם כשאנו מחפשים מהו הסכום האינסופי של הסדרה, אנו מחפשים את מספר ממשי, שאליו שואף הסכום S_n כאשר n שואף ל∞.

במילים מופשטות, אנו מחפשים מספר שהוא המספר שבכל שנגדיל את n להיות מספר יותר ויותר גדול, סכום הסדרה יתקרב אליו.

בכתב פורמלי זה נכתב כך: lim מלשון limit-*גבול*

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

כיוון ש $-1 < q < 1$ אז אנו יודעים כי:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

כלומר כאשר אנחנו לוקחים n-ים מאוד גדולים, אנחנו מתקרבים ל0 יותר ויותר. זה די אינטואיטיבי. אפשר לראות את זה בקלות גם במחשבון. לדוגמא אם נבחר:

$$q = 0.9$$

נראה שאם נעלה אותו בחזקות מאוד גבוהות של n נתקרב מאוד ל0.

$$0.9^{100} = 0.000026561$$
$$0.9^{1000} = 0.0000000000000000000000174$$

כעת נחזור לחישוב הסכום:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (\lim_{n\to\infty} q^n - 1)}{q - 1}$$

נשתמש בעובדה ש:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

וקיבלנו כי:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = -\frac{a_1}{q - 1}$$

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$\blacksquare$$

דוגמא לחישוב סכום בעזרת הנוסחה:

נתונה לנו הסדרה הבאה $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

כלומר $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$

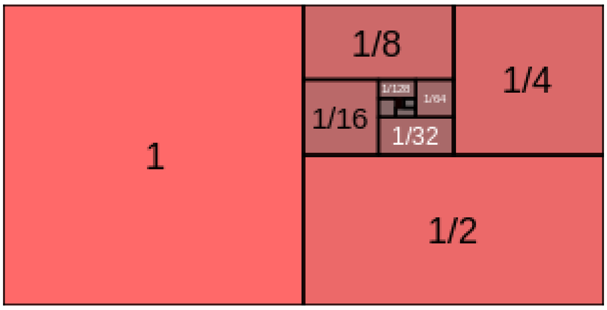
$$-1 < q = \frac{1}{2} < 1$$

לכן הסדרה מתאימה לנוסחה של סכום סדרה הנדסית אינסופית.

נציב בנוסחה ונקבל:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

הנה דיאגרמה להמחשה של הסכום:



גדילה ודעיכה:

הנוסחה אשר מופיעה בדף הנוסחאות:

כעבור זמן t : $M_t = M_0 \cdot q^t$, q – שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן.

ראשית נתחיל בלהבין מהם הפרמטרים בנוסחה.

t כמו שנאמר לנו, זה הזמן שעבר.

M_0 הכמות שהייתה לנו בהתחלה, כאשר $t = 0$

q שיעור הגדילה (או הדעיכה) המתאים לזמן $t = 1$

בדרך כלל בבעיות גדילה ודעיכה, יהיה נתון לנו שיעור גדילה או דעיכה באחוזים.

כדי למצוא את q המתאים נשתמש בנוסחה הבאה:

נסמן את השינוי הנתון באחוזים ב$z\%$

אם נתון לנו כי הכמות יורדת (דועכת) ב$z\%$ אזי הנוסחה לq המתאים היא:

$$q = 1 - \frac{z}{100}$$

ואם נתון לנו כי הכמות עולה (גודלת) ב$z\%$ אזי הנוסחה לq המתאים היא:

$$q = 1 + \frac{z}{100}$$

כעת נסתכל על דוגמא לשימוש בנוסחה:

שווי של שחקן כדורגל יורד בשנה ב8%

שוויו של השחקן כריסטיאנו רונאלדו היום הוא 112 מיליון דולר.

א. מה יהיה שוויו בעוד חמש שנים?
ב. מה היה שוויו לפני שנתיים?

פתרון:

נסמן את הנתונים בסימונים המוכרים לנו

$$M_0 = 112{,}000{,}000 \qquad q = 1 - \frac{8}{100} = 0.92$$

בסעיף א', $t = 5$

לכן:

$$M_{t=5} = 112{,}000{,}000 \cdot 0.92^5 = 73{,}817{,}130.6$$

ולכן התשובה בסעיף א' היא ששוויו בעוד 5 שנים יהיה $73,817,130.6\$$

בסעיף ב', $t = -2$ (אין בעיה שt יהיה גם זמן שלילי)
לכן:

$$M_{t=-2} = 112{,}000{,}000 \cdot 0.92^{-2} = 132{,}325{,}141.8$$

ולכן התשובה בסעיף א' היא ששוויו לפני שנתיים היה $132,325,141.8\$$

חבל שהוא עזב את ריאל :(

כעת נסתכל מעט על הנוסחה להבין מדוע היא עובדת כך.

יש לנו כמות התחלתית M_0 ונתון לנו שהיא גודלת (או דועבת) ב$z\%$ כל יחידת זמן אחת.

מה זה אומר?

שבכל יחידת זמן 1, אנחנו מוסיפים (או מורידים) $z\%$ מM_0 ממנו.

איך נחשב כמה זה $z\%$ מM_0? כך: $M_0 \cdot \frac{z}{100}$

לכן אם נרצה להוסיף $z\%$ לM_0 אז ה$M_{t=1}$ החדש שנקבל הוא:

$$M_{t=1} = M_0 + M_0 \cdot \frac{z}{100} = M_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{100}\right)^1$$

ובדומה אם נרצה להוריד $z\%$ מM_0 אז ה$M_{t=1}$ החדש שנקבל הוא:

$$M_{t=1} = M_0 - M_0 \cdot \frac{z}{100} = M_0 \cdot \left(1 - \frac{z}{100}\right)^1$$

כעת הבנו למה מחשבים כך את q. כעת נבין מדוע q^t בנוסחה.

נניח ונרצה לחשב מה תהיה כמות החומר אחרי n שנים.

אז כל שנה נוסף לM_0 $z\%$ ומדובר על n שנים, אז בשנה הראשונה נוסיף $z\%$ לM_0. בשנה השנייה נוסיף $z\%$ לתוצאה שיצאה לנו מקודם, הכמות בסוף השנה הראשונה.

בשנה השלישית נוסיף $z\%$ לתוצאה שיצאה לנו מקודם, הכמות בסוף השנה השנייה, וכך הלאה...

וכך אנחנו מבינים מדוע יש לנו את יחידת הזמן שלנו t בחזקה:

עבור n שנים, כל שנה אנחנו מוסיפים עוד $z\%$ כלומר מכפילים בעוד q.

$$M_{t=n} = M_0 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdots q \cdot q = M_0 \cdot q^n$$

הבנו איך הנוסחה עובדת, איך להשתמש בה ומדוע היא נכונה. לדעתי זו נוסחה מאוד נחמדה שחשוב להכיר ולהבין מכיוון שהיא שימושית בהרבה תחומים בחיים, בעיקר בכלכלה – משכנתאות וריביות, השקעות ומניות ועוד..

לוגריתמים:

$$(a, b, c > 0 \ ; \ a, b \neq 1) \qquad \log_a(a^b) = b \quad , \quad a^{\log_a b} = b \quad , \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad , \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad , \quad \log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$$

ראשית, ניזכר בהגדרת הlog .

לפי הגדרה:

אם $\log_b c = a$ אז הדבר אומר ש: $b^a = c$

כלומר לוג של c לפי בסיס b כמו בהגדרה, שואל את השאלה הבאה:

באיזה חזקה צריך להעלות את b כדי לקבל את התוצאה c?

נשים לב שהלוגריתם מוגדר כאשר ($a, b \neq 1$ וגם $a, b, c > 0$)

כמה דוגמאות שממחישות טוב:

$$\log_{10} 1000 = 3 \qquad \log_9\left(\frac{1}{9}\right) = -1$$

$$\log_{69} 69 = 1 \qquad \log_4 16 = 2$$

כעת נעבור על הזהויות השונות שנמצאות בדף הנוסחאות.

.1 $\log_a(a^b) = b$

זוהי הזהות הכי ברורה וקלה להבנה, הרי היא משתמשת בצורה ישירה בהגדרה של הלוגריתם.

נסתכל על תוכן הלוג בצד שמאל. באיזה חזקה נצטרך להעלות את הבסיס a על מנת לקבל את מה שבתוך הסוגריים של הלוג (a^b)? כמובן שהתשובה היא b.

.2 $a^{\log_a b} = b$

נסמן את $\log_a b = x$. מה אנחנו יודעים לפי הגדרת הלוגריתם? ש $a^x = b$. לכן נציב בחזרה את מה שסימנו כx ונקבל שוב בקלות את מה שרצינו.

$$a^{\log_a b} = b$$

.3 $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

כדי להוכיח את הזהות נשנה מעט את מה שנצטרך להוכיח. נכפיל במכנה. נקבל:

$$\log_b c \cdot \log_a b = \log_a c$$

נסמן את שני האיברים בכפל בצד שמאל:

$$\log_b c = x_1$$
$$\log_a b = x_2$$

נקבל ש: $x_1 \cdot x_2 = \log_a c$. כלומר לפי הגדרת הלוג, $a^{x_1 \cdot x_2} = c$. זה מה שנצטרך להוכיח, ואז נקבל שהזהות נכונה.

לפי הסימונים שסימנו מתקיים:

$\log_a b = x_2$ ולכן לפי הגדרת הלוג נקבל ש: $a^{x_2} = b$

$\log_b c = x_1$ ולכן לפי הגדרת הלוג נקבל ש: $b^{x_1} = c$

כעת נפשט לפי חוקי חזקות פשוטים:

$$a^{x_1 \cdot x_2} = a^{x_2 \cdot x_1} = (a^{x_2})^{x_1} = b^{x_1} = c$$

הוכחנו את מה שרצינו! קיבלנו ש:

$$x_1 \cdot x_2 = \log_b c \cdot \log_a b = \log_a c$$

מכאן נחלק את שני צידי המשוואה ונקבל את הזהות שלנו:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

4. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

הוכחה:

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = \text{לפי זהות מספר 2} = b \cdot c$$

קיבלנו ש: $a^{\log_a b + \log_a c} = b \cdot c$

לכן לפי הגדרת הלוג:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

וקיבלנו את הזהות שרצינו להוכיח!

5. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

שוב, קל להוכיח זאת בעזרת חוקי חזקות:

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = \text{לפי זהות מספר 2} = \frac{b}{c}$$

קיבלנו ש: $a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c}$

לכן לפי הגדרת הלוג:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

וקיבלנו את הזהות שרצינו להוכיח!

.6 $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$

נוכיח את הזהות בעזרת חוקי חזקות:

$$a^{t\cdot\log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^t = \text{לפי זהות מספר 2} = b^t$$

קיבלנו ש: $a^{t\cdot\log_a b} = b^t$

לכן לפי הגדרת הלוג:

$$\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$$

ושוב קיבלנו את הזהות שרצינו!

וזהו!

סיימנו לעבור על כל החלק של **אלגברה** בדף הנוסחאות (:

יישר כוח 💪