תרגול 2

1. בכל אחד מהסעיפים, קבעו אם המטריקות שקולות ואם הטופולוגיות מוכלות אחת בשניה, והוכיחו את קביעתכם.
   (א) $(\mathbb{Z}, d_p)$ ו־ $(\mathbb{Z}, d_q)$ עבור $p \neq q$ (ושניהם ראשוניים).
   (ב) (l_1, d_1) ו־ (l_1, d_∞).
   (ג) $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית ומטריקת המרחק על המעגל.
2. הוכיחו את הטענות הבאות
   (א) כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי
   (ב) כל סדרת קושי עם תת סדרה מתכנסת היא מתכנסת
   (ג) כל סדרת קושי היא חסומה
3. הוכיחו או הפריכו: אם שתי מטריקות שקולות והאחת שלמה, גם השניה.
4. עבור כל אחד מהמרחבים הבאים, מצאו סדרת קושי שאינה מתכנסת:
   (א) $\mathbb{Q}$
   (ב) $(\mathbb{Z}, d_p)$ עבור $p \neq 2$ (הטענה נכונה גם עבור $p = 2$, אבל אז ההוכחה טיפה שונה)
   (ג) $(C[0,1], d_1)$
5. יהי X קבוצה ו־(Y, ρ) מרחב מטרי. נניח בנוסף ש־$f : X \to Y$ פונקציה כלשהי. נגדיר פסאודו־מטריקה d על X לפי

$$d(x, y) := \rho(f(x), f(y))$$

(א) הראה שזו פסאודו־מטריקה

(ב) מתי היא מטריקה

(ג) תארו את הטופולוגיה של (X,d) בעזרת הטופולוגיה של (Y,ρ).

6. מרסן (Mersenne) נגד המספרים ה־2־אדים: נגדיר $P_{-1} := \{-1\} \cup \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ is prime}\}$. הוכיחו שאם -1 היא נקודה מבודדת ב־P_{-1} עם המטריקה ה־2־אדית, אז יש רק כמות סופית של ראשוני מרסן.
הערה: אפשר ליצור תרגיל דומה על ראשוני פרמה.

7. קולץ (Collatz) נגד המספרים ה־2־אדים: נגדיר את הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ע"י

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in 2\mathbb{N} \\ 3n+1 & \text{else} \end{cases}$$

עבור $k \in \mathbb{N}$ נסמן $f^{\{k\}}(n) := f(f(\dots(f(n)))$, כלומר, הפעלה מחזורית של f במשך k פעמים.
השערת קולץ אומרת שלכל מספר $n \in \mathbb{N}$ קיים מספר $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$f^{\{k\}}(n) = 1$.
הוכיחו ש־f פונקציה רציפה ביחס למטריקה ה־2־אדית.

8. אם $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ רציפה במ"ש אז תמונה של סדרת קושי $\{x_n\}$היא קושי.

- הערה: עבור פונקציה רציפה שאינה רציפה במ"ש הטענה לא נכונה בהכרח. כלומר, אם $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ רציפה, ו־$(x_n) \subseteq X$ סדרת קושי, ייתכן ש $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ אינה סדרת קושי.

9. יהי (X,d) מרחב פסאודו־מטרי. נגדיר יחס שקילות $\sim$ על X לפי

$$x \sim y \iff d(x,y) = 0$$

(א) הראו שזה יחס שקילות

(ב) הוכיחו שהמטריקה $\overline{d}$ על $X/\sim$ שמוגדרת כ־

$$\overline{d}(\overline{x},\overline{y}) := d(x,y)$$

עבור $\overline{x},\overline{y} \in X/\sim$ מוגדרת היטב והינה מטריקה של ממש.

(ג) הוכיחו שהעתקת המנה $\rho : X \to X/\sim$ משמרת מרחקים. הסבירו מדוע היא לא תמיד תהיה איזומטריה.

10. משפט נקודת שבת: נניח ש־(X,d) מרחב מטרי שלם ותהי $f : X \to X$ פונקציית ליפשיץ עם מקדם $\alpha < 1$. הוכיחו שקיימת ל־f נקודת שבת יחידה, כלומר אחת שמקיימת $f(x) = x$.

• אתגר: השתמשו בטענה הקודמת כדי להוכיח את משפט הקיום והיחידות של משוואות דיפרנציאליות (חפשו בויקיפדיה).

11. בונוס ־ למת שוורץ והנגזרת (ספוילר ממרוכבות 2): נתבונן במרחב H של הפונקציות האנליטיות בסביבה של דיסק היחידה $D \subseteq \mathbb{C}$ יחד עם נורמת ה־$\max$:

$$\|f\| := \max_{z \in D} |f(z)|.$$

(שימו לב שמשפט ווירשטראוס מבטיח שהמקסימום הזה אכן קיים).
למת שוורץ אומרת שאם $\|f\| \leq 1$, אז $|f'(0)| \leq 1$.
הוכיחו שפונקציית הנגזרת ב־0, כלומר הפונקציה $\partial_0 : H \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$\partial_0(f) := f'(0)$$

היא פונקציית ליפשיץ.
הראו שהטענה הזו לא נכונה אם מסתכלים על פונקציות גזירות ברציפות אינסוף פעמים מעל $[0,1]$.