פתרון תרגיל 2

1) א. נשים לב כי $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^n}{5^{n+1}}\,dt$

עבור $|t|<5$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{5}\right)^n = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{5}} = \frac{1}{5-t}$

זהו טור הנדסי ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5-t}$ מתכנס לכל $x\in(-5,5)$, עם

רדיוס התכנסות $R=5$.

לפי משפט אינטגרציה איבר איבר, לכל $[a,b]\subseteq(-5,5)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \frac{t^n}{5^{n+1}}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{5^{n+1}}\,dt = \int_0^x \frac{1}{5-t}\,dt$$

$$= -\ln(5-t)\Big|_0^x = -\ln(5-x)+\ln 5 = \ln\left(\frac{5}{5-x}\right)$$

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור $x=5$: מתקבל הטור המתבדר $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

עבור $x=-5$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$. מתכנס לפי לייבניץ.

בסה"כ: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} = \ln\left(\frac{5}{5-x}\right)$. תחום ההתכנסות: $-5\le x<5$.

ב. נשים לב כי $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{n+1}}{(n+1)n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\int_0^x t^n\,dt$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3t)^n}{n!} = e^{3t}$$

לכן $\sum\frac{(3t)^n}{n!}$ מתכנס במ"ש לכל $t\in\mathbb{R}$, עם רדיוס התכנסות $R=\infty$.

לפי משפט אינטגרציה איבר איבר, לכל x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{n+1}}{(n+1)n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(3t)^n}{n!}\,dt = \int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3t)^n}{n!}\,dt = \int_0^x e^{3t}\,dt$$

$$= \frac{e^{3t}}{3}\Big|_0^x = \frac{e^{3x}}{3}-\frac{1}{3}$$

תחום ההתכנסות: כל x.

2) נכתוב $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n\Big|_{x=\frac12}$ ונשים לב כי $nx^n = x\cdot(x^n)'$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)' = x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

רדיוס ההתכנסות של טור ההנדסי הוא $R=1$ ולכן גם זה של טור הנגזרות.

לכן, הגזירה איבר איבר בטור מוצדקת בתחום הסגור $[0,\frac12]$ המוכל בתחום

ההתכנסות ובו טור הנגזרות מתכנס במ"ש.

באותו האופן נשים לב כי, $(x^n)'' = n(x^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2}$, ומכאן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'' = x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'' = x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

לכן בתחום $[0,\frac12]$ נקבל בסה"כ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

החיבור הזה מותר שכן שני הטורים מתכנסים בהחלט בקטע $[0,\frac{1}{2}]$ שהוא בתוך רדיוס ההתכנסות ולכן מותר לסכום את סך האיברים בכל סדר.

נקבל: $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$

3) א. $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(2n+2)(2n+3)}{2n(2n+1)}\right| = 1$

ב. נבצע גזירה איבר איבר של הטור $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ בתחום ההתכנסות.

ונקבל: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n}$. נבצע גזירה נוספת ונקבל

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-1} = -x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} = -x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{-x}{1+x^2}$$

ע"י אינטגרציה נקבל $f'(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

נציב $x=0$ בטור שקיבלנו עבור $f'(x)$ ונקבל $f'(0)=0$, ולכן $c=0$.

ולכן $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{4})$.

4) א. $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n\cdot 4^{n+1}}{4^n (n+1)}\right| = 4 \Longleftarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n x^{n-1}}{4^n}$

ב. נבצע אינטגרציה איבר איבר של הטור בתחום ההתכנסות:

$$\int f(x)dx = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{4^n} = c - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-x}{4}\right)^n = c - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{4}\right)^n - 1\right)$$

$$= c + 1 - \frac{1}{1+\frac{x}{4}} = c + \frac{1+\frac{x}{4}-1}{1+\frac{x}{4}} = c + \frac{x}{4+x}$$

לכן $f(x) = \left(c + \frac{x}{4+x}\right)' = \frac{4}{(4+x)^2}$

ומכאן $f(1) = \frac{4}{(4+1)^2} = \frac{4}{25}$

(ניתן להציב $x=1$ משום שנמצא בתחום ההתכנסות.)

5) א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3\cdot 3^n}$, כלומר $a_n = \frac{1}{n^3\cdot 3^n}$.

לפי דלמבר: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3\cdot 3^{n+1}}{n^3\cdot 3^n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot 3 = 3$$

עבור $x=3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ $\Leftarrow$ מתכנס.

עבור $x=-3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ $\Leftarrow$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

ולכן תחום ההתכנסות הוא $[-3,3]$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$, כלומר $a_n=\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$

לפי דלמבר: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)\cdot 2^{n+2}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right| = 2$

עבור $x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ $\Leftarrow$ מתבדר.

עבור $x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ $\Leftarrow$ טור לייבניץ ולכן מתכנס בתנאי.

לכן תחום ההתכנסות הוא $[-3,3)$. הטור מתכנס בהחלט ב- $(-3,3)$ ובתנאי ב- $x=-3$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+1)}$ כלומר $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$

לפי דלמבר: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\right| = 1$

הטור מתכנס לכל $|x-2|<1 \Longleftrightarrow -1<x-2<1 \Longleftrightarrow 1<x<3$

עבור $x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ $\Leftarrow$ מתבדר.

עבור $x=3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ $\Leftarrow$ טור לייבניץ ולכן מתכנס בתנאי.

לכן תחום ההתכנסות הוא $(1,3]$. הטור מתכנס בהחלט ב- $(1,3)$ ובתנאי ב- $x=3$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{3n}+3^{3n})(x-1)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{3n}+3^{3n})y^n$

לפי קושי הדמר: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{3n}+3^{3n}} = \lim_{n\to\infty}3^3\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}+1} = 27$

הטור מתכנס לכל $|x-1|^3<\frac{1}{27} \Longleftrightarrow |x-1|<\frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{2}{3}<x<1\frac{1}{3}$

עבור $x=1\frac{1}{3}$: $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{3n}+3^{3n})\left(\frac{1}{3}\right)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}+1\right)$ $\Leftarrow$ מתבדר.

עבור $x=\frac{2}{3}$: $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{3n}+3^{3n})\left(-\frac{1}{3}\right)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}+1\right)$ $\Leftarrow$ מתבדר.

לכן תחום ההתכנסות הוא $\left(\frac{2}{3},1\frac{1}{3}\right)$, בתחום זה הטור מתכנס בהחלט.

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n} \cdot y^n$

לפי ד'למבר:
$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\frac{n+1}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^{n+1}\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}=\frac{1}{3}$$

הטור מתכנס ל- $|x+1|<\frac{1}{3} \iff -1\frac{1}{3}<x<-\frac{2}{3}$.

עבור $x=-1\frac{1}{3}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} \Leftarrow$ מתבדר.

עבור $x=-\frac{2}{3}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} \leftarrow$ מתבדר (ע' השוואה עם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$)

לכן תחום ההתכנסות הוא $\left(-1\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$. בתחום זה הטור מתכנס בהחלט.

ו. $\sum_{n=1}^{\infty} n^a (x-x_0)^n$

לפי קושי אדמר: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^a}=1$

נקבל התכנסות עבור $|x-x_0|<1$, כלומר $-1+x_0<x<1+x_0$.

עבור $x=x_0+1$: $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \Leftarrow$ מתכנס בהחלט עבור $a<-1$ ומתבדר אחרת.

עבור $x=x_0-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^a \leftarrow$ מתכנס בהחלט עבור $a<-1$,

מתכנס בתנאי עבור $-1\le a<0$

מתבדר עבור $a\ge 0$.

ז. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$.

לפי ד'למבר: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

ולכן הטור מתכנס עבור $x-a=0$, כלומר שהערך היחיד עבורו הטור מתכנס הוא $x=a$.

8א' נזכר כי $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

נשתמש בסכום של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$, $|x|<1$

בתחום ההתכנסות הטור ניתן לאינטגרציה: $\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt$
$$=\arctan t\Big|_0^x=\arctan x$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$\longrightarrow \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1$$

ב. טור החזקות שקיבלנו מתכנס גם בנקודה $x=1$:

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \Longrightarrow$ טור לייבניץ ולכן מתכנס.

ומכאן ש:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

ולכן נקבל:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

7)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^{2n})}{n!}$$

נעשה אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \dots + r_n$$

זהו טור לייבניץ, ולכן

$$|r_n| \le |S - S_n| < a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < \frac{1}{1000}$$

עבור $n=4$ נקבל את הדיוק המבוקש, ולכן:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0.747$$