משפט 6(משפט השארית)

יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ. נניח ש$f(z)$ מוגדרת ואנליטית ב$\overline{D}$ פרט לנקודות סינגולריות $z_1, z_2, \ldots z_n \in D$.
אזי

$$\oint_{\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

הוכחה

עבור $1 \leq k \leq n$ נבחר עיגול קטן $B(z_x, r_k)$ כך ש$\overline{B(z_k, r_k)} \subset D$ ו$B(z_k, r_k)$ מכיל רק נקודה סינגולרית אחת z_k.

השפה של עיגול זה היא $C_k \equiv C(z_k, r_k)$(מעגל קטן סביב z_k). כעת γ יחד עם $C_1, C_2, \ldots C_n$ מהווים שפה של תחום $D_1 \subset D$ כך ש$f \in H\left(\overline{D}_1\right)$. לפי משפט קושי המוכלל

$$\oint_{\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$$

■

דוגמת חישוב

נחשב $\oint_{|z|=2} z^4 e^{1/z}\ \mathrm{d}z$:

$$2\pi i \operatorname{Res}\left(z^4 e^{1/z}, 0\right)$$

כדי לחשב את השארית נקבע את טור לורן של $z^4 e^{1/z}$ בסביבה מנוקבת של 0:
ובכן: לכל $w \in \mathbb{C}$, $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$. עבור $z \neq 0$ נציב $w = 1/z$ לקבל

$$e^{1/z} = e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

כיוון שטור לורן יחיד קיבלנו טור לורן של $e^{1/z}$ סביב 0.
נובע: לכל $z \neq 0$

$$z^4 e^{1/z} = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{4-n}$$

$\operatorname{Res}\left(z^4 e^{1/z}\right)$ = המקדם של $\frac{1}{z}$ בטור לורן = במקרה שלנו $\frac{1}{5!}$.

תשובה סופית לתרגיל

$$\oint_{|z|=2} z^4 e^{1/z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}\left(z^4 e^{1/z}, 0\right) = (2\pi i)\frac{1}{5!} = \frac{2\pi i}{5!}$$

דרך קצרה לחשב $\mathrm{Res}\left(f, z_0\right)$ כאשר z_0 היא קוטב של f

מקרה 1

אם z_0 "קוטב פשוט", ז"א קוטב מסדר 1, אז סביב z_0

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

לכן

$$(z-z_0) f(z) = b_1 + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + a_2(z-z_0)^3 + \dots$$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0) f(z) = b_1 = \mathrm{Res}\left(f, z_0\right)$$

מקרה 2

אם z_0 קוטב מסדר $n>1$ אז סביב z_0

$$f(z) = \frac{b_n}{(z-z_0)} + \frac{b_{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \frac{b_{n-2}}{(z-z_0)^{n-2}} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

$$(z-z_0)^n f(z) = b_n + b_{n-1}(z-z_0) + \dots + b_1(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + \dots$$

הטור האחרון הוא טור טיילור(בלי חזקות שליליות) עבור הפונקציה $\varphi(z) = (z-z_0)^n f(z)$ סביב z_0. בטור הזה "b_1" הוא המקדם של $(z-z_0)^{n-1}$, ולכן

$$b_1 = \frac{\varphi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = \overbrace{\lim_{z\to z_0}}^{\text{many times}} \frac{\varphi^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}$$

וזאת השארית.

בסיכום

(א) אם z_0 קוטב פשוט ל-f אז

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

(ב) אם z_0 קוטב מסדר $n>1$ עבור f אז נגדיר $\varphi(z)=(z-z_0)^n f(z)$ ואז

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{\varphi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}$$

דוגמאות חישוב

1. נחשב

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^3(z+4)}\,\mathrm{d}z$$

ובכן: לפונקציה $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z+4)}$ יש שני קטבים, ב-$z_0=0$ ו-$z_1=-4$. אבל $z_1=-4$ הוא מחוץ למעגל $|z|=2$ ולכן לא משפיע על האינטגרל. נסיק:

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^3(z+4)}=2\pi i\operatorname{Res}(f,0)$$

ב-$z_0=0$ קיים ל-f קוטב מסדר 3, ולכן יש להגדיר

$$\varphi(z)=z^3f(z)=z^3\frac{1}{z^3(z+4)}=\frac{1}{z+4}=(z+4)^{-1}$$

לפי הנוסחה המקוצרת

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{\varphi''(0)}{2!}$$

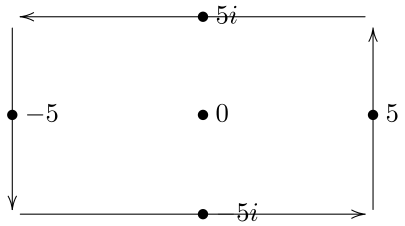
$$\varphi(z)=(z+4)^{-1}\qquad\varphi'(z)=-(z+4)^{-2}\qquad\varphi''(z)=2(z+4)^{-3}$$

$$\varphi''(0)=2(4)^{-4}=\frac{1}{32}$$

תשובה סופית:

$$2\pi i\operatorname{Res}(f,0)=2\pi i\left[\frac{\varphi''(0)}{2!}\right]=2\pi i\frac{1}{64}=\frac{\pi i}{32}$$

2. תהי γ ריבוע



נחשב

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^3 (z+4) \mathrm{d}z}$$

תשובה: γ מקיפה שתי נקודות סינגולריות של $f(z) = \frac{1}{z^3(z+4)}$, ולכן ע"פ משפט 6

$$\oint_{\gamma} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-4)\right]$$

כבר חישבנו $\mathrm{Res}(f,0) = \dfrac{1}{64}$. לגבי $z_1 = -4$ קיים שם קוטב פשוט של f ולכן

$$\mathrm{Res}(f,-4) = \lim_{z\to -4} (z+4) f(z) = \lim_{z\to -4} \frac{1}{z^3} = \frac{-1}{64}$$

לכן לסיכום

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^3 (z+4)} \mathrm{d}z = \oint_{\gamma} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-4)\right) =$$

$$= 2\pi i \left[+\frac{1}{64} - \frac{1}{64}\right] = 0$$

3. נחשב $\int_0^{\infty} \dfrac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} \mathrm{d}x$. זה אינטגרל ממשי לא אמיתי. האינטגרל מתכנס כי המכנה שונה מאפס לכל $x \in [0,\infty)$, ועוד שהמכנה בעל מעלה 4 והמונה בעל מעלה 2. לכן עבור x גדול הפונקציה

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} \approx \frac{2}{x^2}$$

וידוע ש $\int_1^{\infty} \dfrac{2}{x^2} \mathrm{d}x$ מתכנס.

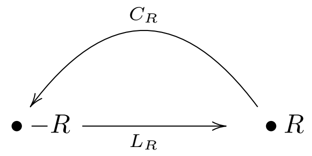
גם $f(x)$ זוגית ולכן

$$\int_0^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x$$

וכיוון שהאינטגרל מתכנס הוא שווה

$$\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\ \mathrm{d}x$$

כאשר $L_R + C_R$ חצי מעגל כאשר L_R החלק הישר וC_R החלק העגול:



נציב $z = x$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$ לרשום ש

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{L_R+C_R} f(z)\ \mathrm{d}z - \int_{C_R} f(z)\ \mathrm{d}z\right]$$

טענה: $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$

הוכחה: על C_R, $|z| = R$, לכן

$$|f(z)| = \left|\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}\right| \le \frac{\left|2z^2\right| + |-1|}{|z^4| - |5z^2| - |4|}$$

על C_R זה שווה $\frac{2R^2+1}{R^4-5R^2-4}$, לכן

$$\left|\int_{C_R} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \le ML = M_R\cdot\pi R = \frac{2R^2+1}{R^4-5R^2-4}\cdot\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

מ.ש.ל טענה.

מכל זה נובע:

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R+C_R} f(z)\ \mathrm{d}z$$

כיוון ש$L_R + C_R$ מסילה סגורה ו$f(z)$ אנליטית בתוכה פרט לקטבים, אפשר לחשב $\int_{L_R+C_R} f(z)\ \mathrm{d}z$ ע"פ משפט השארית. כזכור,

$$f(z) = \frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)}$$

יש קטבים ב$\pm i$ ו$\pm 2i$. ברגע ש$R > 2$, $L_R + C_R$ מקיף את הקטבים i ו$2i$, לכן עבור כל $R > 2$

$$\int_{L_R+C_R} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,2i)\right]$$

ב־$z=i$ יש ל־f קוטב פשוט, לכן

$$\operatorname{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\cancel{(z-i)}\frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z+i)\cancel{(z-i)}}=\frac{-3}{3(2i)}=\frac{i}{2}$$

באופן דומה נחשב

$$\operatorname{Res}(f,2i)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\lim_{z\to 2i}\cancel{(z-2i)}\frac{2z^2-1}{(z+2i)\cancel{(z-2i)}(z^2+1)}=\frac{-9}{(4i)(-3)}=\frac{-3}{4}i$$

תשובה סופית לתרגיל:

$$\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,i)+\operatorname{Res}(f,2i)\right]=\pi i\left[\frac{i}{2}-\frac{3}{4}i\right]=\pi/4$$

הערה: מכיוון שזוהי פונקציה ממשית, היה חייב לצאת לנו מספר ממשי! אם היה יוצא מספר מרוכב זה סימן שעשינו טעות!

הכללה

השיטה הנ"ל יפה לכל אינטגרל מהסוג $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$ כאשר $q(x)\neq 0$ עבור $x\in\mathbb{R}$ ו־$\deg q\geq(\deg p)+2$.

ואם כן, האינטגרל שווה $2\pi i$ כפול סכום השאריות של $\frac{p}{q}$ בחצי המישור העליון.

דוגמה 4

נחשב $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$:

$x^2+1\neq 0$ ב־$\mathbb{R}$. $|\cos x|<1$ ב־$\mathbb{R}$. לכן $\frac{\cos x}{x^2+1}\approx\frac{1}{x^2}$ עבור x גדול והאינטגרל מתכנס.

לכן הוא שווה

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

נציב $z=x$, $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x$ לקבל

$$\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}\frac{\cos z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\left[\int_{L_R+C_R}\frac{\cos z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z-\int\frac{\cos z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right]$$

בניגוד לדוגמה הקודמת, השיטה הזו לא מועילה כאן כי לא נוכל להוכיח $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\cos z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=0$. הסיבה היא ש־$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. אם למשל $z=iR+C_R$,

$$\cos z=\cos(iR)=\frac{e^{i(iR)}+e^{-i(iR)}}{2}=\frac{e^{-R}+e^{R}}{2}\approx\frac{e^R}{2}$$

זה הרבה יותר גדול מהמכנה שבסדר גודל R^2 על C_R.

לכן זה אינו ברור(ובדרך כלל לא נכון) ש

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\cos z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=0$$

והשיטה נכשלת.
נתחיל מחדש לחשב $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ שהוא

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{Re}\ e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{Re}\frac{\cos x+i\sin x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

נציב $z=x$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}z$ לקבל

$$\lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\int_{L_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\left[\int_{L_R+C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z-\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right]$$

טענה: $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=0$

הוכחה: נתחיל עם הערה פשוטה: אם $z=x+iy$

$$\left|e^z\right|=\left|e^{x+iy}\right|=\left|e^x\right|\left|e^{iy}\right|=e^x=e^{\mathrm{Re}\ z}$$

לכן

$$\left|e^{iz}\right|=e^{\mathrm{Re}(iz)}=e^{\mathrm{Re}[i(x+iy)]}=e^{-y}$$

על C_R $y=\mathrm{Im}\ z\geq 0$ לכן $-y\leq 0$ לכן $e^{-y}\leq e^0=1$. נובע שלכל $z\in C_R$

$$\left|e^{iz}\right|=e^{-\mathrm{Im}\ z}\leq 1$$

לכן על C_R

$$\left|\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right|=\frac{\left|e^{iz}\right|}{\left|z^2+1\right|}\leq\frac{1}{R^2-1}=M_R$$

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right|\leq ML=M_R\cdot\pi R\leq\frac{\pi R}{R^2-1}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

והוכחנו את הטענה.

מכל הנ"ל יוצא ש

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\int_{L_R+C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

לכל $R>1$, L_R+C_R מקיף נקודת סינגולריות אחת $z=i$. לכן לכל $R>1$

$$\mathrm{Re}\int_{L_R+C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=\mathrm{Re}\ 2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1},i\right)=$$

$$=\mathrm{Re}\ 2\pi i\lim_{z\to i}\frac{\cancel{(z-i)}e^{iz}}{\cancel{(z-i)}(z+i)}=\mathrm{Re}\frac{2\pi i e^{-1}}{2i}={}^{\pi}/_{e}$$

השיטה הנ"ל ישפה לכל אינטגרל מהסוג $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos ax\,\mathrm{d}x$ או $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin ax\,\mathrm{d}x$ כאשר p ו-q פולינומים, $q(x)\neq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, ו-$\deg(p)\geq(\deg p)+2$.

יש גם "למת זורדן" שאומרת שאם $\deg q\geq(\deg p)+1$, $\int_{C_R}\to 0$ ולכן השיטה עובדת גם במקרה זה.

דוגמה 5

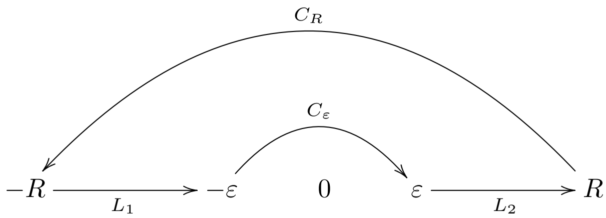
נחשב $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$:

הפונציה זוגית ולכן יש כאן $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. האינטגרל מתכנס ע"פ מבחן דריכלה, ולכן שווה

$$\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\mathrm{Im}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x$$

השוויון האחרון <u>לא נכון</u>! כי לפונקציה $\frac{e^{ix}}{x}$ יש סינגולריות באפס ולכן $\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x$ מתבדר, ואילו $\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ מתכנס, כי כאן הסינגולריות באפס סליקה.

אלא



$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{L_1+L_2}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=$$

$(z=0)$

$$=\int\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\mathrm{Im}\int_{L_1+L_2}\int\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z=$$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 9}} \operatorname{Im}\left[\int_{L_1+C_\varepsilon+L_2+C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right]$$

כעת, $L_1+C_\varepsilon+L_2+C_R$ מסילה סגורה. הפונקציה $\dfrac{e^{iz}}{z}$ אנליטית בה ובתוכה.
לפי משפט קושי

$$\int_{L_1+C_\varepsilon+L_2+C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = 0$$

לפי למת ז'ורדן

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z...$$

נסיק

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}\int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z$$

כעת עבור $\varepsilon>0$ כלשהו

$$\int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}-1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{-C_\varepsilon} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2$$

נעיר שבI_1,

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}-1}{z} = \cancel{\frac{0}{0}} = \lim_{z\to 0}\frac{ie^{iz}}{1} = i$$

לכן אם $\varepsilon>0$ מספיק קטן, $\left|\dfrac{e^{iz}-1}{z}\right|$ על המסילה $-C_\varepsilon$. לכן $|I_1| \le \underbrace{M}_{=2}\underbrace{L}_{=\varepsilon\pi} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.
מכל הנ"ל נסיק ש

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-C_\varepsilon} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

כעת עבור $\varepsilon>0$ כלשהו
......
פרמטריזציה ל$-C_\varepsilon$ נתונה ע"י

$$z = \varepsilon e^{i\theta} \qquad 0\le\theta\le\pi$$

$$\mathrm{d}z = i\varepsilon e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$I_2 = \int_{-C_\varepsilon} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi \frac{1}{\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}} i\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \pi i$$

בלתי תלוי בε.
תשובה סופית:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-C_\varepsilon}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\pi i\right) = {}^{\pi}/_{2}$$